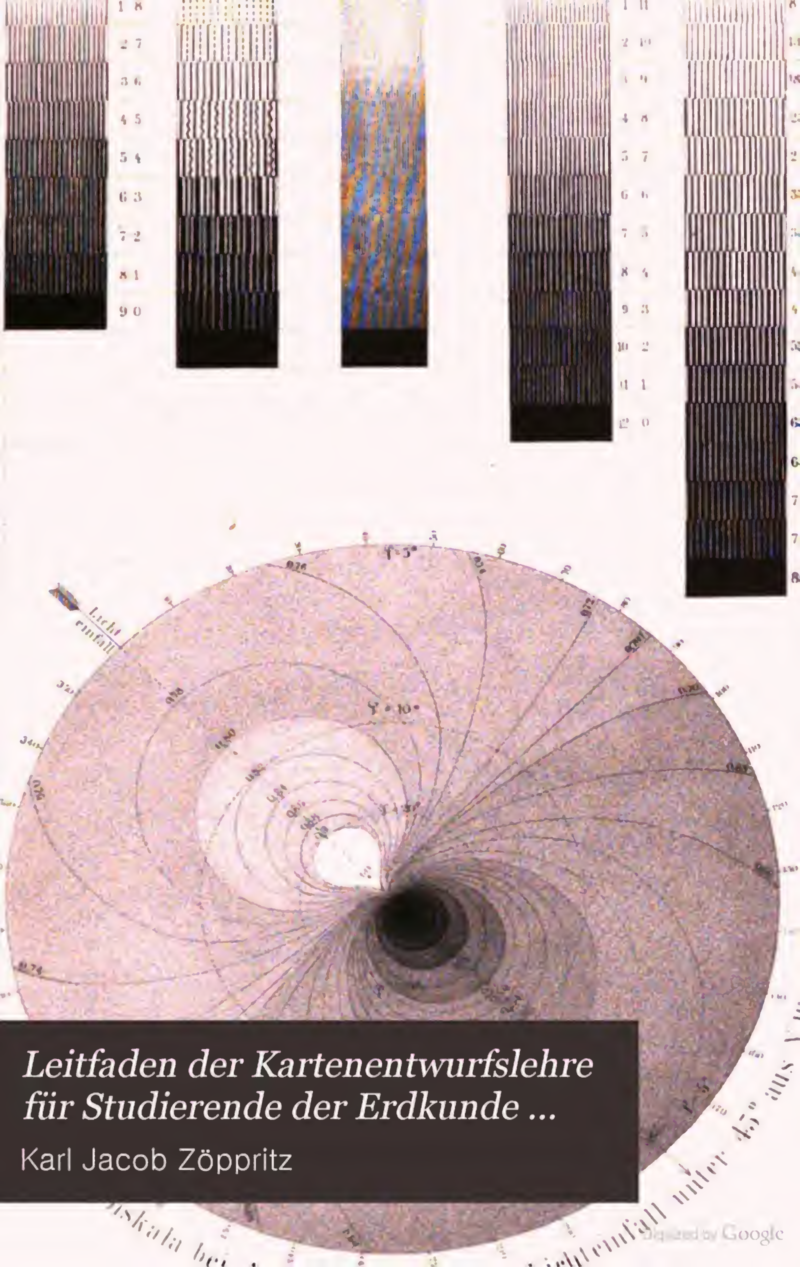


Leitfaden der Kartenentwurfslehre für Studierende der Erdkunde ...

Karl Jacob Zöppritz

LEITFADEN

DER

KARTENENTWURFSLEHRE.

FÜR

STUDIERENDE DER ERDKUNDE UND DEREN LEHRER

BEARBEITET VON

DR. KARL ZÖPPRITZ,

ORD. PROFESSOR DER ERDKUNDE AN DER UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG I. PR.

MIT FIGUREN IM TEXT UND EINER LITHOGRAPHISCHEN TAFEL.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Vorwort.

Dieser Leitfaden ist dem Bedürfnis des Universitätsunterrichts entsprungen. Die Kenntnis der geometrischen Methoden, auf denen der Kartenentwurf beruht, und ein gewisser Grad von Übung in der Handhabung derselben ist unerläſslich für jeden, der Karten mit Nutzen gebrauchen, Geographie nicht blos dilettantisch betreiben will.

Diejenigen, welche sich auf der Universität geographischen Studien hingeben, sind in der praktischen Anwendung der auf den oberen Schulklassen erworbenen mathematischen Kenntnisse meist nur wenig, im Zeichnen mit Zirkel und Lineal so gut wie gar nicht geübt. Der Unterricht im Kartenentwurf muſs demgemäſs sehr elementar beginnen. Vielfach sind dabei bisher Steinhausers „Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkartenprojektion" zu Grunde gelegt worden, worin der Autor in jeder Hinsicht *ab ovo* beginnt und sowohl zum geometrischen Zeichnen wie zum Konstruieren der einfacheren Kartennetze ganz elementare und sehr klare Anleitung giebt. Allein dieses in seiner Art treffliche, wenn auch etwas bunt zusammengestellte Werkchen setzt auch bezüglich der theoretischen Vorbildung ein Niveau voraus, das diejenigen, welche ein Zeugnis der Reife erlangt haben, im Durchschnitt doch ziemlich weit überragen. Der Universitätslehrer kann, indem er das ausgebildetere Vorstellungsvermögen und die erworbenen Kenntnisse seiner Zuhörer, wenn auch nur in bescheidenem Maſse, ausbeutet, deren Einsicht in die Methoden der Projektions- wie der Terrainlehre doch erheblich mehr vertiefen, als für eine bloſs mechanische Abrichtung zum Zeichnen erforderlich ist, und erzielt dadurch den doppelten Gewinn, daſs in den Lernenden mehr Interesse für den Gegenstand erwächst, und daſs Anschauungen und Kenntnisse tiefere Wurzeln in ihnen schlagen.

In der Projektionslehre (Netzentwurf) habe ich mich bestrebt, die elementargeometrische Konstruktion in den Vordergrund zu stellen, wo dies irgend anging. Die Festlegung der Maſsverhältnisse in Formeln, zu deren Begründung fast nur die trigonometrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck benutzt werden, ist in der Regel ganz unabhängig und zwar namentlich deshalb eingefügt, weil für genaue Zeichnungen die Auftragung berechneter Maſse der rein geometrischen Konstruktion meist vorzuziehen ist. Eigentliche Rechnungen sind überall vermieden. An zwei oder drei Stellen finden sich Grundformeln der sphärischen Trigonometrie benutzt.

Wesentlich anders als in allen mir bekannten Kompendien der mathematischen Geographie ist in vorliegendem Leitfaden das einlei-

tende Kapitel über Ortsbestimmung auf der Erde und die darauf gegründete Netzeinteilung bearbeitet. Hier galt es gründlich zu brechen mit der bisher fast ausnahmslos beobachteten und im Elementarunterricht auch nicht wohl zu umgehenden Praxis, dafs man — um es etwas derb auszudrücken — anfangs die Meridiane zwischen Äquator und Pol in gleiche Teile (Grade) einteilt, um in einem späteren Abschnitt zu lernen, dafs diese Teile ungleich sind.

Zum ersten Male für ein Lehrbuch verwertet findet man hier die Tissot'schen Untersuchungen über die Deformationsgesetze bei der Kartenprojektion, deren eminente Wichtigkeit für die praktische Kartographie vorläufig erst von wenigen Geographen geahnt zu werden scheint. Ich gebe mich der Hoffnung hin, dafs das Schlufskapitel meiner Netzentwurfslehre etwas dazu beitragen werde, die Aufmerksamkeit der Kartographen auf die Wahl rationellerer Projektionen zu lenken, deren Einführung in die Atlanten ich durch Berechnung einiger Tabellen für bestimmte Kontinente zu fördern gesucht habe. Die bisher gebräuchlichsten Entwurfsarten findet man sämtlich besprochen, auch wenn ihnen, wie z. B. der Bonneschen, durch die Tissotsche vergleichende Analyse der Deformationsverhältnisse die fernere Anwendungsberechtigung entzogen wird.

Im zweiten Teile habe ich namentlich die für den Geographen so wichtigen, geometrisch höchst einfachen, aber in den Kompendien etwas vernachlässigten Routenkonstruktionen in abgerundeter Form darzustellen mich bemüht.

Das von mir angestrebte praktische Ziel ist, eine Anleitung zu richtigem Konstruieren, genauem Zeichnen zu geben; hingegen habe ich keine Vorschriften für die Reinzeichnung und künstlerisch schöne Vollendung der Karten zugefügt. Dies ist aus mehreren Gründen unterlassen worden. Zunächst ist es nicht der Zweck des Universitätsunterrichts, topographische Zeichner und Kartographen auszubilden. Zur Erlangung derjenigen Fertigkeit, die hier erreicht werden kann, wird das Beispiel, das der Lehrer mit einigen Feder- und Pinselstrichen giebt, viel mehr beitragen, als seitenlange gedruckte Vorschriften. Eine weitere Vervollkommnung ist aber nur durch fortgesetzte Arbeit nach guten Mustern zu erlangen, wie sie in den Publikationen vieler Staatsinstitute (z. B. der Generalstäbe) sowie auch mancher Privatanstalten geboten werden. — Der Anhang über geometrisches Zeichnen wird manchem trivial erscheinen, doch hielt ich seine Aufnahme durch den zu Anfang erwähnten Mangel entsprechender Vorübung der meisten Studierenden für gerechtfertigt.

Es sei dies Werkchen vornehmlich dem Wohlwollen meiner Herren Fachkollegen an den deutschen Hochschulen, dann aber allen denjenigen empfohlen, die von den darin niedergelegten Lehren Gebrauch machen können.

Königsberg i. Pr. im Juli 1883. **Der Verfasser.**

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Ortsbestimmung.

Erste Abteilung.

Netzentwurf (Projektionslehre).

Zweite Abteilung.

Topographie.

Tabellen und Übersichten.

Einleitung.

Ortsbestimmung.

Die Erdoberfläche kommt an Gestalt einer Kugeloberfläche sehr nahe, zeigt aber, genauer betrachtet, von dieser sehr mannigfaltige und ganz unregelmäfsige Abweichungen. Es ist deshalb eine Aufgabe von grofser Wichtigkeit, die Lage eines Punktes auf ihr bestimmt angeben und nach dieser Angabe jederzeit rasch und unzweideutig wiederfinden zu können. Man bedient sich hiezu einer geometrischen Abmessungsart und einer darauf begründeten Einteilung der Erdoberfläche, die von den in der Planimetrie gebräuchlichen Abmessungsmethoden wesentlich abweicht und deshalb hier im Vergleich mit diesen zu besprechen ist.

I. Gewöhnliche geometrische Ortsbestimmungsmethoden.

A. Ortsbestimmung auf einer Linie. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes auf einer geraden Linie genügt die Angabe des Abstandes des Punktes von einem in der Geraden ein für allemal fest angenommenen Anfangs- oder Nullpunkte, wenn noch hinzugefügt wird, nach welcher Seite hin der Abstand wachsend gerechnet werden soll. Ist diese Richtung ein für allemal festgesetzt, so kann man die auf der entgegengesetzten Seite liegenden Punkte als solche mit negativem Abstand auffassen und durch die Angabe einer Anzahl von Längeneinheiten (z. B. Millimeter) mit positivem oder negativem Vorzeichen die Position jedes Punktes der Geraden unzweideutig bestimmen.

Denkt man sich zu beiden Seiten des Nullpunktes mehrere Punkte durch beigeschriebene Abstandszahlen markiert, so wird man vom Nullpunkte ausgehend nach der einen Seite immer wachsende, nach der anderen immer abnehmende (nämlich im Negativen wachsende) Zahlen antreffen. Zur Auffindung eines durch seinen Abstand gegebenen Punktes ist also die Anlegung eines Mafsstabs vom gegebenen Nullpunkt aus erforderlich. Teilt man die Gerade selbst in die be-

treffenden Längeneinheiten, so wird sie selbst zum Mafsstab, worauf die Lage irgend eines Punktes sofort angegeben werden kann.

Dieselbe Ortsbestimmung kann auch auf eine gegebene krumme Linie übertragen werden, wenn man statt des Abstandes die Länge des Bogens zwischen dem Nullpunkt und dem zu bestimmenden Punkt als Bestimmungsstück wählt.

B. Ortsbestimmung auf einer Ebene. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Ebene (z. B. auf einer Zeichnung) ist die Angabe zweier Bestimmungsstücke nötig. Die Abstände des Punktes von zwei ein für allemal in der Ebene gezogenen Geraden sind dazu hinreichend. Die Bestimmung durch die Abstände von zwei sich rechtwinklig schneidenden Achsen ist die gebräuchlichste. In einer Zeichnung würde man am zweckmäfsigsten die Abstände von zwei der sich rechtwinklig schneidende Ränder hiezu wählen. Das von dem Punkt Q auf die eine Achse gefällte Perpendikel y nennt man gewöhnlich die Ordinate, den Abschnitt seines Fufspunktes auf jener Achse, vom Ursprung 0 d. h. dem Schnittpunkt beider Achsen aus gerechnet, die Abscisse (x); beide zusammen die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes. Auch hier hat man je eine Seite vom Ursprung aus als positive, die entgegengesetzte als negative anzunehmen. Die beiden Koordinatenachsen $-X, X$; $-Y, Y$ teilen die Ebene

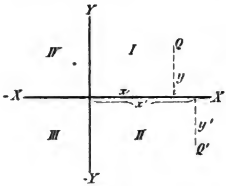


Fig. 1.

in vier Winkelräume. In dem Raume I sind Abscisse und Ordinate positiv, in II ist für einen Punkt Q' die Ordinate y' negativ, weil nach unten zu ziehen, die zugehörige Abscisse positiv. In III sind Abscisse und Ordinate negativ, in IV ist die Abscisse negativ, die Ordinate positiv.

Die Aufsuchung eines Punktes, dessen Abscisse und Ordinate in Längeneinheiten (mm) mit ihren Vorzeichen gegeben sind, macht eigentlich drei Operationen nötig: 1) Abtragung der Abscissenlänge auf der X Achse, 2) Errichtung einer Senkrechten, 3) Abtragung der Ordinatenlänge auf dieser. Die erste und dritte Operation wird vermittelst eines Mafsstabs ausgeführt. Namentlich wenn viele Punkte aufgetragen werden sollen, werden diese Operationen ungemein erleichtert, wenn man die Zeichnung mit einem Mafsstabsnetz überzieht d. h. wenn man zwei Systeme von Parallelen zu beiden Achsen in den Abständen der Längeneinheit (z. B. je 1^{mm}) von einander auszieht; oder doch ein solches Netz auf einer durchsichtigen Tafel (Glasplatte, Bauspapier) aufträgt, die man auf die Zeichnung auflegen kann. In solchen Netzen ist gewöhnlich die zehnte Linie stark, die fünfte halb-

stark ausgezogen um die Übersicht zu erleichtern, auch sind an den Rändern Zahlen (z. B. von cm zu cm) beigesetzt, die von einem Nullpunkt, der meist in der Ecke angenommen wird, ausgehen. (S. Fig. 2 Millimeternetz.) Bei Benutzung einer solchen Tafel müssen natürlich Nullpunkt und Linienrichtung mit den entsprechenden der Zeichnung genau zum Zusammenfall gebracht werden. Dann aber läfst sich mit Hülfe des Netzes jeder Punkt seiner Lage nach leicht angeben; weil man die Abstände von beiden Achsen unmittelbar ablesen kann. Diese Punktbestimmung durch rechtwinklige Koordinaten ist aber nur eine unter vielen anderen Bestimmungsweisen. Sehr zweckmäfsig ist auch die Anwendung der **Polarkoordinaten**. Hiebei wird ein Punkt Q bestimmt durch seine Entfernung r von einem Fixpunkte, demsogenannten Pol, P, und durch den Winkel φ, welchen der Leitstrahl (Radius vector) $PQ = r$ mit einer gegebenen festen Richtung PA bildet. Ist für irgend einen Punkt die Entfernung r vom Pol in Längeneinheiten, und der Winkel φ in Winkelmafs (Graden, Minuten, Sekunden) gegeben, so läfst sich der Punkt unzweideutig mit Winkeltransporteur und Mafsstab auftragen, sobald ein für allemal festgesetzt ist, auf welcher Seite von AP der Winkel anzutragen ist; also in welchem Sinne der Winkel φ wächst. In der beistehenden Fig. 3 ist die vielfach übliche Annahme gemacht, dafs der Winkel wächst, wenn sich der Leitstrahl wie ein Uhrzeiger fortbewegt. Die Länge r ist immer positiv zu nehmen. — Auch bei dieser Bestimmungsweise kann ein Netz gute Dienste leisten, dasselbe hat aber hier ein wesentlich anderes Aussehen. Die sämtlichen Punkte, welche in gleichem Abstand vom Pol liegen, bilden eine Kreislinie um denselben als Centrum. Läfst man also diesen Abstand von 0 auf 1^{mm}, 2^{mm}, 3^{mm} u. s. w. wachsen, so erhält man eine Schar von konzentrischen Kreisen als einen Netzbestandteil. Die sämtlichen Punkte, denen derselbe Winkel φ gegen die Achse PA zukommt, liegen auf einer geraden von P ausgehenden Linie. Zieht man also von P aus Strahlen, die mit PA die Winkel 1^0, 2^0, 3^0 u. s. w. bis 360^0 bilden, so hat man in ihnen den zweiten Bestandteil des Netzes, Fig. 4, worin je der zehnte Kreis stark, der fünfte halbstark ausgezogen und von den Strahlen nur die von 10 zu 10^0 ein-

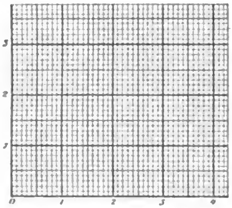


Fig. 2. Millimeternetz.

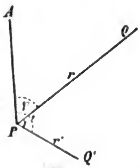


Fig. 3.

gezeichnet sind. — Auch ein solches Netz, auf eine Zeichnung eingetragen oder mittels einer durchsichtigen Tafel aufgelegt, kann dazu dienen durch direkte Ablesung die Polarkoordinaten, d. i. Leitstrahl

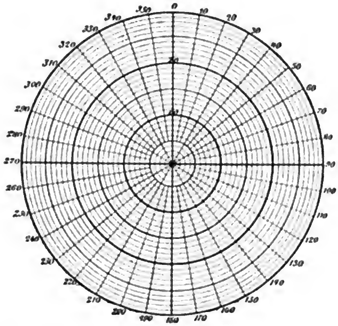


Fig. 4.

und Polwinkel eines Punktes zu geben, oder auch nach gegebenen Polarkoordinaten einen Punkt in eine Zeichnung einzutragen.

C. Ortsbestimmung auf krummen Oberflächen. Minder einfach gestaltet sich die Aufgabe der Ortsbestimmung auf einer krummen Oberfläche. Man könnte auch hier ein Polarkoordinatensystem zu Grunde legen, dessen Elemente nicht mehr gerade Linien und Kreise, sondern krumme Linien sind, von denen die erste Schar strahlenförmig unter gleichen Winkeln vom Pol ausgeht, während die zweite Schar aus krummen Linien besteht, die in je gleichem Bogenabstand vom Pol diesen umziehen. Diese Einteilungsart würde sich in der That für eine mathematische Kugeloberfläche sehr gut eignen und auf einer solchen auch mechanisch leicht durchführen lassen. Nimmt man den Ursprung (Pol) des Koordinatensystems irgendwo auf der Kugel an und denkt sich durch den diesen Pol mit dem Mittelpunkt verbindenden Durchmesser eine Ebene gelegt, so schneidet diese die Kugeloberfläche in einem durch den Ursprung gehenden gröfsten Kreis und eine an den Pol gelegte Tangentialebene in einer durch den Pol gehenden Geraden, die also Tangente an diesen Kreis ist. Eine zweite durch denselben Durchmesser gelegte Ebene giebt einen zweiten gröfsten Kreisschnitt der Kugel und eine zweite Gerade als Schnitt mit der Tangentialebene. Diese zweite Gerade bildet mit der ersten denselben Winkel, den die beiden Kreisebenen miteinander bilden, und da die beiden Kreislinien in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes mit

ihren Tangenten zusammenfallen, so schneiden sich auch die beiden gröfsten Kreise im Pol unter demselben Winkel. Legt man also durch denselben Durchmesser eine Schar von Ebenen, die Winkel von 1^0, 2^0, 3^0, ... 180^0 mit der ersten bilden, so wird die Kugeloberfläche durch deren Durchschnittslinien mit einem vom Pol ausgehenden Stern versehen, dessen Strahlen sich gleichfalls unter Winkeln von je 1^0 schneiden. Sie sind lauter gröfste Kreise der Kugel und schneiden sich noch ein zweites Mal unter denselben Winkeln in demjenigen Punkte, wo der gemeinsame Durchmesser die Kugeloberfläche zum zweitenmal schneidet, dem entgegengesetzten Pole. Man könnte nun mittels eines biegsamen Mafsstabs (Mefsbands) vom Pole aus auf einem dieser Kreise Bogenlängen auftragen, die um je eine Längeneinheit (z. B. 1^{mm}) verschieden sind, und dann mittels eines im Pol eingesetzten Zirkels durch die aufgetragenen Teilpunkte Kreise legen, die das Netz vervollständigen würden. Statt dessen verfährt man aber bei der Kugel in der Regel so, dafs man die zwischen den beiden Polen enthaltene Hälfte eines gröfsten Kreises in 180 gleiche Teile teilt und durch diese Teilpunkte die vom Pol gleich abständigen Kreise legt. Man hat hierdurch den Vorteil, dafs die durch die Teilpunkte jedes gröfsten Kreises gezogenen Radien mit dem Polardurchmesser Winkel von 1^0, 2^0, 3^0, ... 180^0, untereinander also Winkel von je 1^0 bilden.

Wenn auch eine Kugel von mäfsiger Gröfse, z. B. ein Globus auf diese Art unschwer mit einem zur Ortsbestimmung genügenden Netze zu überziehen wäre, so würde doch dieses Einteilungsprinzip für eine vollkommene Kugel von der Gröfse der Erde nicht durchführbar sein und noch weniger für einen von der Kugel abweichenden Körper, wie es die Erde selbst ist. Der Grund hiezu liegt in der grofsen Umständlichkeit und Schwierigkeit, womit die genaue Messung gröfserer Längen auf der Erdoberfläche verbunden ist. Man müfste, um einen gröfsten Kreis, oder allgemeiner gesprochen die Durchschnittskurve einer durch den Erdmittelpunkt gehenden Ebene, in gleiche Teile teilen zu können, vor allem deren Länge genau kennen, welche Voraussetzung bei der Erde durchaus nicht hinlänglich erfüllt ist. Aber selbst wenn man diese Länge und somit ihren 180^{sten} Teil genau kännte, würde es doch eine aufserordentlich umständliche Operation sein, die Punkte der Erde anzugeben, die um 1, 2, 3, 4 ... dieser Teilbogenlängen vom Pole entfernt sind. Man mufste deshalb für die Erde ein Einteilungsprinzip ersinnen, welches von diesen Schwierigkeiten frei ist und für jeden Punkt der Erde eine raschere Lagenbestimmung ermöglicht. Ein solches ist für die Erde durch die Achsendrehung derselben und die Sichtbarkeit der Himmelskörper ge-

geben und liefert ein Netz über die Erdoberfläche, welches, wenn die Erde eine mathematische Kugel wäre, mit demjenigen zusammenfallen würde, das nach der vorher beschriebenen Methode gleicher Bogenabstände geliefert werden würde. Es wird unter „Astronomische Ortsbestimmung“ unten näher behandelt. Das bisher besprochene ideelle Kugelnetz ist für die Anknüpfung der geometrischen Anschauung immerhin zweckmäfsig; man darf aber nie vergessen, dafs die Art und Weise, wie man es sich gewöhnlich entstanden denkt, für die wirkliche Erdeinteilung unanwendbar ist.

Vergleicht man dasselbe mit dem Netze der rechtwinkligen Koordinaten und dem der Polarkoordinaten in der Ebene, so zeigt die nach ihm eingeteilte Kugeloberfläche teils Ähnlichkeit mit dem ersteren, teils mit dem letzteren. Um die Pole herum gleicht das Netz völlig dem der ebenen Polarkoordinaten; in der Kugelzone jedoch, die in der Mitte zwischen beiden Polen liegt, gleicht es dem der rechtwinkligen Koordinaten, falls man den Äquator, d. h. denjenigen gröfsten Kreis, der gleichweit von beiden Polen entfernt ist, als Abscissenachse betrachtet. Denn dieser Kreis wird von allen durch den Polardurchmesser gelegten gröfsten Kreisen rechtwinklig geschnitten und die gröfsten Kreisbogen sind in der Nähe der Durchschnittspunkte sämtlich parallel; sie bilden also mit den dem Äquator benachbarten und parallelen Kreisen rechtwinklige Bogenvierecke, welche sehr nahe quadratisch sind, wie beim rechtwinkligen Koordinatensystem der Ebene. — Näher den Polen verwandeln sich die Kurvenvierecke in krummlinige symmetrische Paralleltrapeze.

II. Astronomische Ortsbestimmung.

A. Die Erde rotiert mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine Achse, welche eine in ihr unveränderliche Lage hat, also stets durch dieselben beiden Punkte ihrer Oberfläche, die sogenannten Pole, hindurchgeht. Die Pole nehmen eine solche Ausnahmestellung gegenüber allen übrigen Punkten der Erdoberfläche ein, dafs jede geometrische Einteilungsart dieser Oberfläche sie natürlich als Ausgangspunkte benutzen wird. Die Erdachse hat ferner eine unveränderliche Lage im Weltraum; wenigstens ist die Richtungsänderung derselben im Verlauf eines Menschenlebens kaum bemerkbar und kann hier aufser acht gelassen werden.

Den genannten Bewegungszustand, d. h. die gleichförmige Rotation der Erde um eine in ihr und im Weltraum unveränderliche Achse erkennt man aus der **scheinbaren Bewegung der Himmelskörper**, der Gestirne; am deutlichsten aus dem scheinbaren Kreislauf der am

Himmelsgewölbe feststehenden, der Fixsterne. Ein Beobachter auf der Erdoberfläche beurteilt die Lage eines Gestirns nach dessen Stellung zu Fixlinien, die mit dem terrestrischen Beobachtungspunkt fest verbunden und jeden Augenblick zu verifizieren sind. Zu diesen gehört vor allem die Lotlinie, d. h. die Richtung, in welcher die Schwerkraft an dem Beobachtungsort wirkt, und welche durch einen dünnen unten beschwerten Faden jederzeit hergestellt werden kann. Die zu dieser Richtung senkrecht durch den Beobachtungspunkt gelegte Ebene nennt man den Horizont desselben. Er ist jederzeit durch die freie Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeitsmasse gegeben. Den Punkt am Himmel, wo die Lotlinie das Himmelsgewölbe schneidet, nennt man das Zenit des Beobachtungsortes. Denkt man sich durch das Auge eine Lotlinie und die Horizontalebene gelegt, so wird man bemerken, dafs der nach einem Fixsterne gerichtete Sehstrahl im Laufe der Nacht nicht nur seinen Winkel mit dem Lot, die sogenannte Zenitdistanz, sondern auch seine Entfernung von irgend einer festangenommenen senkrechten (also durch die Lotlinie gelegten) Ebene ändert; mit anderen Worten, dafs der Stern sich im vertikalen und im horizontalen Sinne bewegt und am Himmel scheinbar eine krumme Linie beschreibt, die innerhalb eines Tages in sich selbst zurückkehrt, denn nach dieser Zeit steht der Stern wieder in derselben Lage gegen die Lotlinie und die angenommene Vertikalebene wie nachts zuvor. Gröfsere Sterne lassen sich mittels des Fernrohrs auch tagsüber wahrnehmen, man kann also mit einem solchen Instrument den ganzen Verlauf z. B. eines Sterns des grofsen Bären innerhalb 24 Stunden verfolgen und wird, wenn man dies ausführt, bemerken, dafs die von dem Stern beschriebene Bahn ein Kreis ist. Beginnt man z. B. die Beobachtung in dem Augenblick, da der Stern seine äufserste Ausweichung nach rechts besitzt, so steigt derselbe empor, indem er allmählich gleichzeitig nach links rückt, bis er nach 6 Stunden seine höchste Höhe am Himmel erreicht hat und bei fortdauernder Bewegung nach links allmählich wieder sinkt, d. h. eine gröfsere Zenitdistanz erhält. Nach weiteren 6 Stunden erreicht er seine äufserste Ausweichung nach links und nach im ganzen 18 Stunden seinen tiefsten Stand, bis er nach 24^h wieder die erste Lage annimmt. Wenn die Aufstellung und Ausstattung des Fernrohrs gestattet, den Winkel abzulesen, den der Sehstrahl nach dem höchsten Punkt mit dem nach dem tiefsten Standpunkt des Sternes bildet, sowie den Winkel, welchen der Sehstrahl nach dem äufsersten linken Punkt mit dem nach dem äufsersten rechten macht, so zeigt sich, dafs diese beiden Winkel einander gleich sind und dafs dieselben in Ebenen liegen, die aufeinander senkrecht stehen, nämlich die beiden ersten Punkte in einer Vertikalebene, die beiden letzteren

in gleicher Höhe über dem Horizont. Man schliefst daraus, dafs die Bahn des Sterns zwei aufeinander senkrechte Durchmesser von gleicher Länge besitzt, wie dies bei einem Kreise der Fall sein mufs. Die Vergleichung anderer Durchmesser der Bahn gestattet den Beweis ihrer Kreisform mit aller Strenge zu führen, was aber hier unnötig ist. Der Mittelpunkt des Kreises liegt in der Vertikalebene des höchsten und tiefsten Punktes und in der Mitte zwischen beiden. Seine Zenitdistanz z ist also um ebensoviel gröfser als die z_1 des höchsten Punktes, wie sie kleiner ist als die z_2 des niedrigsten, d. h. es mufs sein

$$z - z_1 = z_2 - z$$

oder $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$, d. h. die Zenitdistanz des Mittelpunktes ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Zenitdistanzen des höchsten und des niedrigsten Standes des Sterns.

Da die Lotlinie senkrecht auf dem Horizont steht, so bildet jede in der Horizontalebene gezogene Linie einen Winkel von 90^0 mit dem Lot. Der Sehstrahl nach einem Punkt am Himmel bildet mit dem Horizont einen Winkel, der das Komplement auf 90^0 zum Zenitabstand ist und Höhenwinkel oder kurz Höhe genannt wird. Nennt man ihn h, den Zenitabstand z, so hat man

$$h = 90^0 - z$$

also auch

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2},$$

d. h. der Höhenwinkel des Mittelpunktes der Bahn ist gleich dem arithmetischen Mittel aus der gröfsten und der kleinsten Höhe des Sterns.

Alle Fixsterne beschreiben solche Kreisbahnen um denselben Mittelpunkt, nur der Durchmesser der Bahnen und die Zeit, um welche sie ihren höchsten Stand erreichen, kulminieren, ist verschieden. Doch kann man nicht bei allen Sternen den ganzen Kreis wahrnehmen, weil sie zum grofsen Teil unter den Horizont untertauchen und erst, nachdem sie einen Teil ihrer Bahn für den Beobachter unsichtbar zurückgelegt haben, an einer anderen Stelle des Horizonts wieder aufgehen. Der sichtbare Teil ihrer Bahn bewährt sich aber auch als Kreisbahn zu jenem selben Mittelpunkt, den man den Himmelspol nennt. Die für den Beobachter in ihrem ganzen Verlauf sichtbaren Sterne nennt man Circumpolarsterne. Alle übrigen gehen auf der einen Seite des Horizonts auf, steigen schief von links nach rechts empor, kulminieren, d. h. erreichen einen höchsten Stand — der aber für jeden Stern eine verschiedene Höhe hat und zu anderer Zeit er-

reicht wird — und sinken dann wieder allmählich in symmetrisch gestalteter Bahn zum gegenüberliegenden Rande des Horizontes.

B. Wie schon gezeigt wurde, liegen der höchste und der tiefste Punkt, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt, die obere und die untere Kulmination jedes Sternes in derselben Vertikalebene mit dem Pol. Diese durch die Lotlinie gelegte Ebene ist also eine höchst ausgezeichnete für den Beobachtungsort, weil sie die scheinbaren Bahnen aller Gestirne in zwei symmetrische Hälften teilt. Man nennt sie seine Meridianebene; die Linie, in welcher dieselbe die Himmelskugel schneidet, heifst der Himmelsmeridian. Die Schnittlinie derselben Ebene mit der durch den irdischen Standpunkt gelegten Horizontalebene giebt die Meridianrichtung an diesem Orte*). Zieht man in der Horizontalebene eine Linie senkrecht zur Meridianrichtung, so bestimmen deren beiden Richtungen nebst denen des Meridians die sogenannten vier Weltgegenden oder Himmelsrichtungen, welche die Grundlage der geographischen **Orientierung** bilden. Die Richtung, welche nach der Seite des Aufganges der Gestirne weist, wird Ost genannt, diejenige Hälfte der Meridianlinie, die beim Fortrücken im Sinne des Uhrzeigers zuerst erreicht wird, Süd, die entgegengesetzte der Ostrichtung West und die bleibende Meridianrichtung Nord**). Der Himmelspol, der nach dieser Richtung hin liegt, heifst deshalb der Nordpol. Die Bewohner des uns diametral gegenübergelegenen Teils der Erdoberfläche können die Stelle des Himmels, an welcher der Nordpol liegt, nicht sehen; an dem ihnen sichtbaren Teil des Himmelsgewölbes liegt der Südpol. Auch für uns giebt sich die Existenz eines zweiten Bewegungcentrums kund. Wenn man nämlich die Kreise verfolgt, welche von Sternen beschrieben werden, die in immer gröfserem Abstande vom Pol liegen, so wird deren Durchmesser immer gröfser, d. h. der Winkel, der von den Sehstrahlen nach den beiden Endpunkten eines Durchmessers (z. B. nach dem äufsersten östlichen und dem äufsersten westlichen Punkte der Bahn) gebildet wird, wächst immer mehr. Der Sehstrahl, der einem Stern auf seinem Laufe folgt, beschreibt im Raum einen Kreiskegel, dessen Spitze im Auge liegt und dessen Achse durch den Pol geht. Je näher

*) Im Französischen unterscheidet man le méridien (sc. plan) und la méridienne (sc. ligne), versteht aber unter letzterer in der Regel den erst später zu definierenden Erdmeridian.

**) Bei der üblichen Bezeichnungsweise der Himmelsrichtungen mit den Anfangsbuchstaben ist es zweckmäfsig sich der englischen Initialen E, S, W, N zu bedienen, weil der Buchstabe O im Französischen Ouest bedeutet, also zu Verwechslungen beim internationalen wissenschaftlichen Verkehr Veranlassung geben kann. In der Meteorologie ist die englische Bezeichnungsweise durch internationales Übereinkommen allgemein eingeführt.

der Stern dem Pole liegt, um so spitzer ist dieser Kegel, je weiter er vom Pole entfernt ist, um so stumpfer, flacher wird er. Wenn nun der Winkeldurchmesser der Bahn = 180° geworden ist, ist der Kegel zu einer Ebene geworden. Diese Ebene steht senkrecht zur Richtung nach dem Himmelspol, welche die Kegelachse ist, sie schneidet folglich den Horizont in einer Linie, die senkrecht steht auf dem Meridian, also in der Ost-West-Linie. Ein Stern, der sich in dieser Bahn bewegt, geht genau im Ostpunkt auf, kulminiert südlich vom Zenit in einem Abstand von 90° vom Nordpol und geht genau im Westpunkt unter. — Beobachtet man nun einen Stern, der noch weiter vom Pol absteht, also noch südlicher kulminiert, so beschreibt der Sehstrahl nach ihm einen nach Süden geöffneten Kegel, dessen Achse zwar immer noch durch die Verlängerung der durch den Nordpol und den Beobachtungspunkt gelegten Linie gegeben ist; der scheinbare Mittelpunkt der Bewegung des Sterns ist aber jetzt derjenige Punkt des Himmels, wo die nach Süden hin verlängerte Achsenrichtung den Himmel schneidet; ein Punkt, der freilich an unserem Sternenhimmel nicht sichtbar, sondern durch den Erdkörper verdeckt ist. Es ist der Südpol.

Jene durch das Auge des Beobachters gelegte Ebene, welche den Fixsternhimmel in eine um den Nordpol kreisende Nordhälfte und eine um den Südpol kreisende Südhälfte teilt, nennt man die Äquatorialebene des Himmels; sie schneidet das Himmelsgewölbe in einem gröfsten Kreis, dem Himmelsäquator. — Die Fixsterne sind in so grofsen Entfernungen von der Erde gelegen, dafs zwei Sehstrahlen, die von zwei beliebigen verschiedenen Orten der Erde nach einem Fixsterne gerichtet sind, keinen mefsbaren Winkel miteinander bilden, sondern parallel erscheinen. Das Himmelsgewölbe denkt man sich als eine so weit entfernte Kugelfläche, dafs alle sichtbaren Fixsterne in seinem Innern enthalten sind, demnach ist auch jeder nicht durch einen Stern eingenommene Punkt des Himmelsgewölbes als ein unendlich entfernter Punkt zu betrachten, der von zwei beliebigen Orten der Erde aus in derselben Richtung gesehen wird. Es ist deshalb einerlei, ob man sich eine von einem Himmelspunkte ausgehende Linie durch den Standpunkt des Beobachters oder durch den Erdmittelpunkt gezogen denkt; beide Richtungen sind parallel. Die Äquatorialebene ist der Inbegriff aller von dem Auge des Beobachters nach den sämtlichen Punkten des Himmelsäquators gezogenen Geraden. Legen wir jede dieser Geraden durch den Erdmittelpunkt statt durch den jeweiligen Beobachtungsort, so erhalten wir eine Schar von Geraden durch den Erdmittelpunkt, die jenen Stück für Stück parallel sind, folglich wieder eine Ebene bilden, die der obigen parallel ist. Mit anderen

Worten man kann die Äquatorialebene des Himmels auch durch den Erdmittelpunkt gehend denken und hat somit eine von dem Standpunkt des Beobachters unabhängige Definition dieser Ebene.

c. Die beschriebene scheinbare Bewegung der Gestirne erklärt sich am einfachsten durch eine **Drehung der Erde** um eine in ihr feste Achse, welche immer die Richtung nach den beiden Himmelspolen besitzt. Die durch die Erdachse gelegte Vertikalebene eines Ortes mufs dann das Himmelsgewölbe jeden Augenblick in einer anderen Linie schneiden. Alle diese Durchschnittslinien müssen aber durch denjenigen Punkt gehen, wo die verlängerte Erdachse das Himmelsgewölbe schneidet, denn jeder Punkt dieser Achse liegt fortwährend in der sich drehenden Ebene. Demnach erscheint für den Beobachter nur dieser Schnittpunkt in Ruhe und immer in derselben Richtung. Ein beliebiger Fixstern, der in einem Augenblick von der Durchschnittslinie jener Vertikalebene passiert wird, entfernt sich dann scheinbar von derselben, doch so dafs sein Abstand von jenem festen Punkte des Himmels unverändert bleibt; seine scheinbare Bewegung ist also eine Kreisbewegung um den Himmelspol als Mittelpunkt, und die Vertikalebene, deren Bewegung soeben verfolgt wurde, ist die Meridianebene des betreffenden Ortes.

1) Da an jedem Ort der Erde die Lage des Himmelspols mit Hülfe der Gestirne rasch und leicht aufzufinden ist, so hat man zur Ortsbestimmung auf der Erdoberfläche vor allem die Beobachtung dieser Lage herangezogen. Man kann die Richtung zum Pol nur vergleichen mit den an jedem Erdpunkt leicht angebbaren festen Richtungen der Lotlinie und des Horizonts. Schon oben wurde gezeigt, wie man den Zenitabstand oder den Höhenwinkel des Pols als arithmetisches Mittel aus der gröfsten und kleinsten Höhe eines Fixsterns bestimmen kann. Diesen Höhenwinkel des Pols, die **Polhöhe**, benutzt man nun als erstes Element der Ortsbestimmung.

> Einen Punkt der Erde, an welchem die Lotlinie durch den Nordpol des Himmels geht, dessen Polhöhe also $= 90^0$ ist, nennt man den Nordpol der Erde, ihm entspricht auf der entgegengesetzten Seite der Erde der Südpol, wo der südliche Himmelspol unter 90^0 Höhe erscheint. Diejenigen Punkte, deren Polhöhe $= 0$ ist, wo also Nord- und Südpol im Horizont liegen, umziehen die Erde in einer Linie, die man den Erdäquator nennt.

Wäre die Erde eine vollkommene Kugel, so würden die Erdpole an den beiden Endpunkten desjenigen Durchmessers liegen, um den sich die Erde dreht, und der Äquator wäre ein gröfster Kreis, dessen

Ebene senkrecht zu jenem Durchmesser wäre*). Da die Erde von der Kugelgestalt nur sehr wenig abweicht, kann auch der Äquator kaum merklich von einer Kreislinie verschieden sein.

2) Verläſst ein Beobachter den Äquator und nähert sich einem der Pole, so wird dieser Pol, der ihm anfangs im Horizont lag, sich nach und nach immer mehr über denselben erheben, die Polhöhe also wachsen. Die Fig. 5 stelle einen Teil eines Meridianschnittes der Erde dar; CP die Achse. P sei ein Pol, E ein Punkt des Äquators. Die Linien EH, AH, PH sind nach dem Himmelspol gezogene Parallelen. Der Horizont für die drei Punkte E, A, P ist durch Tangenten an die Durchschnittskurve dargestellt. Während in E die Richtung nach H mit dieser Tangente zusammenfällt, d. h. den Winkel $= 0^0$ bildet, steht sie im Pol P senkrecht auf der Tangente PT_1, d. h. bildet mit ihr den Winkel $HPT_1 = 90^0$. Im Punkte A ist die Polhöhe $= HAT$, also ein spitzer Winkel. Alle Orte von einer bestimmten Polhöhe liegen auf einer Linie, die ähnlich wie der Äquator die Erde umzieht. Wäre die Erde eine homogene Kugel, so wäre diese Linie ein Kreis, dessen Punkte alle gleichweit vom Erd-Pol entfernt sind, also ein Kreis, dessen Ebene parallel zur Äquatorebene liegt. Auch unter der etwas allgemeineren Voraussetzung, daſs die Erdoberfläche keine vollkommene Kugel, wohl aber eine Rotationsfläche sei, d. h. durch die Rotation einer ebenen, halbkreisähnlichen Kurve NQS um eine in derselben Ebene liegende Achse HH' entstanden gedacht werden könne, sind die Linien gleicher Polhöhe ebenfalls Kreise, die dem Äquator parallel sind, denn jeder Punkt B der Kurve NQS beschreibt einen Kreis, und in jedem Punkte desselben bildet die Tangente BT an die Meridiankurve denselben Winkel HBT mit der Richtung zum Himmelspol, d. h. dieselbe Polhöhe. Die Erde ist weder eine vollkommene Kugel, noch auch ein genauer

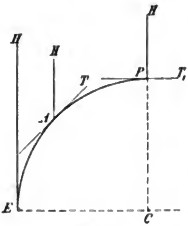


Fig. 5.

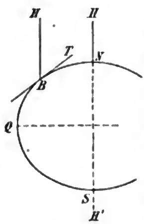


Fig. 6.

*) Hat die Erde eine von der Kugel unregelmäſsig abweichende Gestalt, so ist der Äquator weder ein genauer Kreis noch auch überhaupt eine ebene Kurve, aber jeder auf dem Erdäquator stehende Beobachter muſs notwendig einen Punkt des Himmelsäquators im Zenit haben. Auch die Erdpole werden vielleicht nicht an denjenigen Stellen liegen, wo die Erdachse die Oberfläche schneidet. Es ist sogar möglich, daſs es mehrere Nordpole und mehrere Südpole, d. h. eine gröſsere Anzahl benachbarter Punkte giebt, deren Lotlinien parallel der Weltachse sind.

Rotationskörper, sondern weicht unregelmäfsig aber sehr wenig von einem solchen ab, die die Erde umziehenden Linien, welche die Orte gleicher Polhöhe verbinden, sind deshalb in Wirklichkeit keine genauen Kreise, sondern weichen unregelmäfsig aber immer kaum merklich von solchen ab. Wegen der Kleinheit dieser Abweichung von Kreisen hat man für sie den Namen **Parallelkreise** beibehalten.

Parallelkreise der Erde sind also Linien gleicher Polhöhe.

Der kürzeste auf der Erdoberfläche gemessene Abstand zweier beliebiger Parallelkreise ist an allen Stellen nahezu derselbe. Denkt man sich die Linien von der Polhöhe $0^0, 1^0, 2^0 \ldots 89^0$ auf der Erdoberfläche markiert, ebenso die zweckmäfsig als Linien negativer Polhöhe zu bezeichnenden entsprechenden Linien auf der südlichen Häfte der Erde, so erhält man in diesen Parallelkreisen eine Linienschar, welche als Element eines Netzes zur Ortsbestimmung auf der Erdoberfläche dienen kann.

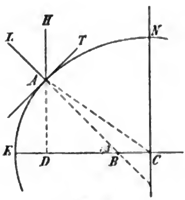


Fig. 7.

Das erdeinwärts verlängerte Lot LA eines Ortes schneidet die zur Erdachse senkrecht stehende Äquatorialebene in einem Punkte B (der nur im Falle vollkommenener Kugelgestalt mit dem Centrum C zusammenfallen würde). Die Winkel HAT und ABD oder β sind einander gleich, weil ihre Schenkel senkrecht aufeinander stehen. Den Winkel β nennt man die geographische Breite oder besser noch die astronomische Breite des Punktes A.

Die geographische Breite ist also gleich der Polhöhe und die Parallelkreise sind auch Linien gleicher geographischer Breite.

Den Winkel ACE, den die vom Punkt A zum Erdmittelpunkt gezogene Gerade mit der Äquatorialebene bildet, nennt man zur Unterscheidung die geozentrische Breite. Er ist von untergeordneter Bedeutung. Bei einer vollkommenen Kugel werden beide Winkel identisch.

3) Legt man eine Ebene durch die Erdachse (einen Meridianschnitt), so wird diese Ebene von jedem der vorhin gezogenen Parallelkreise in zwei Punkten durchdrungen. Die Durchdringungspunkte sämtlicher Parallelkreise liegen auf der Schnittkurve der Erdoberfläche mit der Ebene. Es ist von Interesse, die relative Lage der einzelnen Punkte zu einander zwischen Äquator und Pol etwas genauer zu verfolgen. Diejenige nach einfachem Gesetz gestaltete Oberfläche, welche der wahren Erdoberfläche am nächsten kommt, ist das abgeplattete

Rotationsellipsoid, d. h. die Fläche, welche von einer Ellipse beschrieben wird, wenn sie um ihre kleine Achse rotiert; vorausgesetzt, dafs die kleine Achse derselben nur um $^1/_{300}$ kleiner ist als die grofse. Ein Meridianschnitt dieser Oberfläche ist also die erzeugende Ellipse selbst. Die Aufsuchung der Punkte von der geographischen Breite (oder Polhöhe) $1^0, 2^0, 3^0 \ldots 89^0$ kommt also hinaus auf die Aufgabe, bei einer gegebenen Ellipse Punkte zu bestimmen, deren Tangenten gegebene Winkel mit der kleinen Achse bilden, denn die Richtung der letzteren ist ja die Richtung zum Pol. Diese Aufgabe kann in sehr einfacher Weise konstruktiv gelöst werden mittels einer Elementareigenschaft der Ellipse. Ist an einen Ellipsenpunkt A eine Tangente AT und hiezu parallel durch den Mittelpunkt C ein Durchmesser gelegt, so nennt man diesen Durchmesser mit dem durch den Berührungspunkt gezogenen AG konjugiert. Irgend zwei Sehnen, die von den Enden eines beliebigen Durchmessers nach einem beliebigen Ellipsenpunkt gezogen werden, nennt man Supplementarsehnen. Die erwähnte Eigenschaft der Ellipse ist nun die, dafs Durchmesser, die zu irgend einem Paar Supplementarsehnen parallel sind, konjugiert sind.

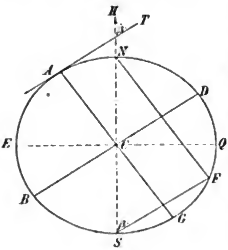
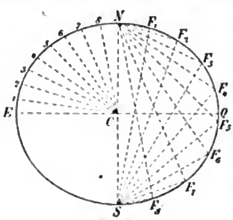


Fig. 8.

Wenn daher eine Tangente AT mit der verlängerten kleinen Achse SNH einen bestimmten Winkel β einschliefsen soll, so braucht man nur durch einen Endpunkt (z. B. S) der kleinen Achse eine Sehne SF unter demselben Winkel β gegen diese zu ziehen; die Supplementarsehne FN ist dann parallel dem zu BD konjugierten Durchmesser AG. Zieht man also AG parallel zu FN, so erhält man den gesuchten Berührungspunkt A, der die Polhöhe β besitzt.


Fig. 9.

Will man z. B. die Punkte von der Breite $10^0, 20^0, 30^0 \ldots 80^0$ bestimmen, so zieht man von S (Fig. 9) aus 8 Strahlen unter den Winkeln $10^0, 20^0, 30^0 \ldots 80^0$, verbindet die Punkte $F_1, F_2, F_3 \ldots F_8$ mit N, zieht durch den Mittelpunkt C Parallele zu NF_1, NF_2, $NF_2 \ldots NF_8$ und erhält so die Durchschnittspunkte 1, 2, 3 ... 8 des 10^{ten}, $20^{\text{sten}} \ldots 80^{\text{sten}}$ Parallelkreises mit der Meridianellipse. — Man sieht leicht, dafs die Punkte

in der Nähe des Äquators näher aufeinanderfolgen und gegen den Pol hin immer weiter auseinandertreten; eine Eigenschaft, die sich auch von vornherein hätte übersehen lassen, denn da eine Ellipse in der Nähe des Endpunktes ihrer grofsen Achse stärker gekrümmt ist, als an den Enden der kleinen, so braucht man dort weniger weit längs der Kurve vorzuschreiten, um die Neigung der Tangente gegen die Achse um 1° sich ändern zu sehen als in der Nähe des Pols, wo die Krümmung schwächer ist.

4. Das astronomisch fixierte Liniensystem der Parallelkreise mufs noch ergänzt werden zum Flächennetz; d. h. man mufs auch in übersichtlicher Weise angeben können, an welcher Stelle eines Parallelkreises ein Punkt liegt. Auch die zweite Linienschar erhält man durch die Benutzung der Gestirne. Die scheinbare Bewegung der Gestirne auf ihren Kreisen geht mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich. Jeder Fixstern durchläuft in gleichen Zeiträumen gleiche Wegstücke seiner Bahn. Hieraus schliefst man, dafs die wirkliche Bewegung der Erde um ihre Achse mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich geht. Alle Punkte der Erde, welche einen bestimmten Fixstern, der im Himmelsäquator liegen mag, gleichzeitig durch ihre Meridianebene passieren sehen, liegen auf einer Linie, die von einem Pol zum andern über die ganze Erde läuft. Wenn die Erde ein genauer Rotationskörper (Kugelgestalt einbegriffen) wäre, so wäre eine durch die Erdachse gelegte Ebene gemeinsame Meridianebene sämtlicher Punkte ihrer Schnittkurve mit der Oberfläche und die Lotlinien dieser sämtlichen Punkte würden in dieser selben Ebene liegen; wenn aber die Erdoberfläche unregelmäfsige kleine Abweichungen von einer Rotationsoberfläche besitzt, so werden die Lotlinien aller Punkte, die den Stern zugleich kulminieren sehen, nicht notwendig in derselben Ebene liegen, sondern kleine Abweichungen aus einer solchen besitzen müssen.

Die Verbindungslinie der Orte gleichzeitiger Kulmination wird **Erdmeridian** genannt.

Derselbe ist eine nahezu ebene Kurve. — Es werde nun der Erdmeridian, welcher durch einen bestimmten ausgezeichneten Punkt der Erde, z. B. durch den Meridianinstrumentpfeiler der Sternwarte von Greenwich geht, als Nullmeridian angenommen. Ferner denke man sich, von einem beliebigen Punkt ausgehend, den Himmelsäquator in 360 gleiche Teile geteilt, die man Grade nennt, weil jeder Teil von der Erde aus gesehen unter einem Gesichtswinkel von 1° erscheint; und diese Teilpunkte markiert (etwa durch je einen fiktiven Stern). In demselben Augenblick, in welchem die auf dem Nullmeridian liegenden Orte einen bestimmten Teilpunkt des Himmelsäquators durch

ihre Meridianebene passieren sehen, sieht eine Reihe von Orten den nächstfolgenden Teilpunkt, eine fernere Reihe von Orten den zweitfolgenden, eine andere den drittfolgenden u. s. w. kulminieren. Jede dieser Reihen liegt auf einem Erdmeridian und man nennt diesen bez. den 1ten, 2ten, 3ten ... 358sten, 359sten Meridian; der 360ste ist wieder der Nullmeridian. Hierdurch hat man das Netz der Erdoberfläche vervollständigt. Durch Angabe des Parallelkreises und des Meridians, worauf ein Punkt liegt, ist dieser unzweideutig bestimmt und durch Beobachtung der Gestirne rasch wieder auffindbar.

Wäre die Erde ein Rotationskörper, so wären, wie schon gesagt, die Meridiane ebene, die Parallelkreise rechtwinklig kreuzende Kurven, welche, wenn man sie von Grad zu Grad ausgezogen denkt, jeden Parallelkreis in 360 gleiche Teile einteilen, deren Ebenen sich also in der Erdachse unter Winkeln von je 1^0 schneiden würden. Im Falle der homogenen Kugel fällt dieses astronomische Netz, wie man sieht, mit dem auf Seite 4 und 5 beschriebenen Kugelnetz zusammen.

D. Die Bestimmung der geographischen Breite und Länge eines Ortes der Erde ist also eine rein astronomische Operation, die durch Längen- und Winkelmessungen auf der Erdoberfläche nie völlig ersetzt werden kann. Die Ausführung jener astronomischen Messungen ist prinzipiell sehr einfach. Um die Polhöhe, also **die geographische Breite zu bestimmen**, braucht man ein Fernrohr, das sich um eine zu seiner Absehlinie senkrechte Achse auf- und abkippen läfst, sodafs sich der Sehstrahl immer in einer Vertikalebene befindet. Sein Winkel mit der Horizontalebene (der Höhenwinkel) mufs an einem vertikalen geteilten Kreise, der mit der Fernrohrachse fest verbunden ist, abgelesen werden können. Beobachtet man ein Gestirn in seiner oberen und 12 Stunden später in seiner unteren Kulmination und notiert beide Male den Höhenwinkel, so erhält man die Polhöhe als arithmetisches Mittel beider. Diese Bestimmungsart setzt nur voraus, dafs man beide Mal denselben Stern beobachtet; von seiner Lage und seinem Namen braucht der Beobachter nichts zu wissen. Nun sind aber alle Sterne, die zu solchen Messungen dienen können, durch die Astronomen längst in ihrer Lage am Himmel wohl bestimmt; und man findet ihren Abstand vom Himmelsäquator, die sogenannte Deklination δ, in den Sternverzeichnissen. Der Polabstand ist die Ergänzung dieses Winkels auf 90^0. Kennt man die Poldistanz $90^0 - \delta$ für einen Stern, so braucht man ihn nur in einer Kulmination zu beobachten. Denn da $90 - \delta$ der Radius des Kreises ist, den der Stern am Himmel beschreibt, so hat man diesen, wenn der Stern z. B. in der oberen Kulmination nördlich vom Zenit beobachtet ist, von dem Höhenwinkel desselben abzuziehen, um den Höhenwinkel des Bahnmittelpunktes, des Pols, zu erhalten.

Man braucht indessen, um die Polhöhe zu bestimmen, nicht einmal den Stern während der Kulmination zu beobachten. Weifs man nur wie lange Zeit seit der Kulmination verflossen ist, so gestattet die genaue Kenntnis von der Bewegung des Sternes auch aus der Sternhöhe zu dieser anderen Zeit die Polhöhe zu berechnen.

Zu allen diesen Bestimmungen wird statt Fixsternen auch sehr häufig die Sonne benutzt. In diesem Fall ist nur zu beachten, dafs die Sonne wegen des Umlaufs der Erde um sie am Himmel keinen festen Ort einnimmt, sondern langsam fortzurücken scheint. Man mufs also für einen gegebenen Beobachtungsmoment die Deklination der Sonne erst berechnen, was vermöge vorhandener Tafeln sehr leicht zu bewerkstelligen ist.

E. Die Bestimmung der geographischen Länge fällt zusammen mit der Aufgabe, die Zeit anzugeben, welche zwischen dem Meridiandurchgang (der Kulmination) eines Sternes an dem betreffenden Orte und dem Meridiandurchgang desselben an einem Punkte des Nullmeridians (Greenwich) verstreicht.

Da man nämlich weifs, dafs innerhalb 24 Stunden 360 Äquatorgrade den Himmelsmeridian des Sterns passieren, so berechnet sich die Anzahl λ von Graden, die sich in der Zeit t hindurch bewegt haben, zu

$$\lambda = \frac{360 \cdot t}{24} = 15\,t$$

wo t natürlich auch in Stunden und deren Bruchteilen ausgedrückt sein mufs.

Zur Bestimmung der Zeit t ist zuvörderst eine gute Uhr erforderlich, die entweder in der Zeit eines Sternumlaufs genau 2 ganze Zeigerumläufe machen mufs, oder von der wenigstens genau bekannt sein mufs, wie grofs ihr Gang innerhalb eines Sternumlaufs ist. Wenn man mit dieser Uhr die Zeit des Meridiandurchgangs eines Sterns in Greenwich beobachtet, sodann sich mit derselben Uhr an den zu bestimmenden Punkt begiebt und die Zeit des Meridiandurchgangs desselben Sterns beobachtet, so giebt, falls die Uhr unverändert geblieben ist, die Differenz der beiden Zeiten das gesuchte t. Das ist im wesentlichen die Methode, nach welcher auf Schiffen mittels Chronometer die Längendifferenz bestimmt wird. — Die Unmöglichkeit zu lande Uhren auf gröfsere Entfernungen ohne Gangänderungen zu transportieren, macht aber dieselbe Methode unanwendbar für Inlandspunkte, weshalb man sich da anderer Methoden bedient. Die zuverlässigste, wo sie anwendbar, ist die durch den Telegraph. Wenn ein Beobachter in Greenwich demjenigen an dem zu bestimmenden Punkte in dem Augenblicke ein Signal giebt, wo der Stern durch seinen Meridian

geht, so hat der zweite nur die Zeit zu notieren, wo er das Signal wahrnimmt, und dann die Zeit, wo er selbst den Stern durch seinen eigenen Meridian gehen sieht. Die Differenz beider Zeiten ist wieder *t*. Statt eines solchen Signals kann aber irgend eine Erscheinung dienen, die von beiden Beobachtern gleichzeitig wahrgenommen werden kann, z. B. ein Pulversignal, oder eine Himmelserscheinung wie der Eintritt des Mondes in den Erdschatten bei Mondfinsternissen, Verfinsterung von Trabanten des Jupiter, Bedeckungen von Fixsternen durch den Mond, oder endlich die Stellung des Mondes selbst, der sich weit rascher als die Sonne am Himmel hin bewegt.

Bestimmt jeder der beiden Beobachter die Zeit, welche zwischen dem Eintreffen einer jener Erscheinungen und dem Meridiandurchgang eines bestimmten Fixsterns verläuft, so giebt Summe oder Differenz dieser beiden Zeiten die gesuchte Zeit *t* und somit die Längendifferenz.

Zur Bestimmung der Zeit eines Meridiandurchgangs bedarf man natürlich eines Fernrohrs, das sich in dem Meridian auf- und abkippen läfst, oder eines äquivalenten Hilfsmittels. Unter diesen möge nur das wichtigste Erwähnung finden: die Benützung korrespondierender Höhen. Da der Kreis, den ein Fixstern am Himmel beschreibt, von dem Meridian in zwei symmetrische Hälften geteilt wird, so befinden sich die Endpunkte zweier gleichlangen rechts und links von einem Kulminationspunkt liegenden Bogenstücke in gleicher Höhe *h* über dem Horizont, und da gleiche Bogen von dem Stern in gleichen Zeiten durchlaufen werden, so braucht der Stern, um von der ersten Höhe *h* bis zur Kulmination zu gelangen, ebensoviel Zeit wie von dieser bis zur zweitmaligen Höhe *h*. Wenn man also die Uhrzeiten t_1 und t_2 notiert, zu welchen der Stern das erstemal und das zweitemal die Höhe *h* erreicht, so weifs man, dafs er genau in der Mitte der Zwischenzeit also zur Zeit $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ durch den Meridian gegangen ist. Wenn z. B. ein Stern dieselbe Höhe, die er um $7^h\ 37^m\ 15^s$ hatte, zum zweiten Male um $11^h\ 58^m\ 49^s$ erreicht, so hat er um $9^h\ 48^m\ 2^s$ den Meridian passiert. Diese Methode giebt also die Zeit des Meridiandurchgangs, wenn man nur ein Fernrohr besitzt, dessen Neigung gegen die Horizontale bei verschiedener Orientierung stets genau wieder hergestellt werden kann.

F. Wenn die besprochenen Methoden zunächst dazu bestimmt sind, für einen beliebigen Ort der Erde die Breite und Länge zu ergeben, so können sie auch ebensowohl benützt werden, um einen **Ort von gegebener Breite und Länge aufzufinden**; nur werden, falls der Punkt nicht noch durch andere Merkmale ausgezeichnet ist, gewisse Hilfsmessungen auf der Erdoberfläche hinzutreten müssen. Da eine grofse Anzahl von Punkten der Erdoberfläche ihrer geographischen

Lage nach bekannt sind, so wird man immer ohne alle Messung ein mehr oder weniger beschränktes Areal angeben können, auf welchem der gesuchte Punkt liegen mufs, und wird auch innerhalb dieses Areals die ungefähre Lage beurteilen können. Macht man nun an dem wahrscheinlichen Orte P' eine Breiten- und eine Längenbestimmung, so wird sich im allgemeinen herausstellen, dafs man sich von dem gesuchten Orte P noch um einen gewissen Breitenunterschied b und einen gewissen Längenunterschied l entfernt befindet. Um an den richtigen Ort zu gelangen ist es zweckmäfsig diese in Winkelmafs (Grad, Minuten, Sekunden) ausgedrückten Unterschiede in Bogenlänge auf der Erdoberfläche zu übersetzen. Der Breitenunterschied b^0 entspricht einem Stück $P'P'' = s$ eines Meridians. Kennt man den Umfang U des ganzen Meridians und nimmt denselben kreisförmig an, was bei diesen Aufgaben meist genügt, so findet man die Länge des Bogenstücks s durch die Proportion:

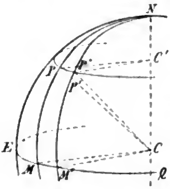


Fig. 10.

$$\frac{s}{U} = \frac{b^0}{360^0} \quad \text{oder} \quad s = U\frac{b}{360}.$$

Der mittlere Radius der Erde beträgt 6 370 000$^{\mathrm{m}}$, der Umfang einer Kugel von diesem Radius also $2\pi \,.\, 6\,370\,000^{\mathrm{m}}$. Ist $b = 1$ Sekunde, $1'' = \frac{1^0}{60\,.\,60}$, so wird

$$s = \frac{2\,.\,3{,}14\,.\,6\,370\,000}{360\,.\,60\,.\,60} = 31^{\mathrm{m}}.$$

Es ist zweckmässig sich ein für allemal zu merken, dafs zu einem Breitenunterschiede von 1 Sekunde ein Bogen von 31$^{\mathrm{m}}$ an der Erdoberfläche gehört. Man hat also, um von dem angenommenen Punkte P' aus auf den richtigen Parallelkreis zu gelangen, um ebenso oftmal 31$^{\mathrm{m}}$ nach Norden (oder Süden) fortzugehn, als der Breitenunterschied b Sekunden enthält. — Der Bogen PP'', um welchen man dann noch auf diesem Parallelkreis weiter zu gehen hat, um die Längendifferenz l d. h. den Winkel zwischen den Ebenen der beiden Meridiane NPM und $NP''M''$ (also $l = \sphericalangle MCM'' = \sphericalangle PC'P''$) auszugleichen, berechnet man aus dem Umfang V des durch P und P'' gehenden Parallelkreises ebenso wie oben s aus U. Es ist:

$$PP'' = V \cdot \frac{l^0}{360^0} = 2r'\pi\,\frac{l}{360},$$

wenn r' der Radius des Parallelkreises ist.

Wäre die Erde eine vollkommene Kugel, so wären geographische und geozentrische Breite identisch $\beta = MCP$ und der Radius des Parallelkreises:

$$r' = C'P = CM \cos\beta$$

wo $CM = CP = r$ der Erdradius ist.

Dann würde:

$$V = 2r\cos\beta\,.\,\pi \qquad \text{während} \qquad U = 2r\pi.$$

Unter der Breite β hat man also, um einen Längenunterschied von 1 Sekunde zu erreichen, um $31\,.\cos\beta$ Meter fortzuschreiten.

Diese Angaben genügen in der Praxis, um den gesuchten Punkt P entweder mit völliger Genauigkeit aufzufinden, oder doch ihm so nahe zu kommen, daſs eine Wiederholung der Operation sicher zu ihm hinführt. Ob man ihn wirklich gefunden hat, darüber kann nur eine neue Bestimmung der Breite und Länge Sicherheit geben.

III. Graphische Ortsbestimmung.

Auf den Nachbildungen der Erde (Globen) oder deren Abbildungen (Karten) erleichtert man die **graphische Ortsbestimmung** und das Aufsuchen bestimmter Orte sehr durch Eintragung des Kugelnetzes mit bestimmten Intervallen, die man je nach dem Maſsstab der Darstellung gröſser oder kleiner nimmt. Man kann dann jedesmal ein Kurvenparalleltrapez angeben, innerhalb dessen der Punkt liegt. Soll von einem verzeichneten Punkte Q (Fig. 11) die Breite und Länge angegeben werden, so lege man erst durch den Punkt einen Parallelkreis P, d. h. eine Parallele zu den Begrenzungsparallelen P_1 und P_2 und messe mit Zirkel und Maſsstab deren Abstand m vom nächsten Parallel (P_1). Nennt man b den in Winkelmaſs ausgedrückten Breitenunterschied zwischen Q und P_1, den zwischen den Parallelen P_1 und P_2 aber B, ist ferner M die Länge des Meridianstücks zwischen P_1 und P_2, so müssen die gemessenen Abstände m und M in dem Verhältnisse stehen:

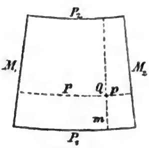


Fig. 11.

$$\frac{b}{B} = \frac{m}{M} \qquad \text{also} \qquad b = B\,\frac{m}{M}.$$

Hat also P_1 die Breite β_1, so hat Q die Breite

$$\beta = \beta_1 + B\,\frac{m}{M}.$$

Um die zwischen den Längen λ_1 und λ_2 der beiden Begrenzungsmeridiane M_1 und M_2 gelegene Länge λ des Punktes Q zu erhalten, messe man die Länge desjenigen Stücks p von P, das zwischen Q und M_2 liegt, sowie den ganzen Bogen P. Man hat dann für die Längendifferenz zwischen Q und M_2

$$l = L \frac{p}{P}$$

wenn L die Längendifferenz zwischen M_1 und M_2 ist. Also ist:

$$\lambda = \lambda_2 - L \frac{p}{P}.$$

Diese Messungen werden dadurch erleichtert, dafs die Kurvenvierecke meist klein genug sind, um als geradlinig betrachtet werden zu können. Ist das Netz sehr engmaschig ausgezogen, so kann man oft die Punkte nach blofser Schätzung mit dem Augenmafs bestimmen.

Liegt die umgekehrte Aufgabe vor, einen Punkt nach gegebener Breite und Länge in das Gradnetz einzutragen, so sind in obigen Formeln b und l die gegebenen, dagegen die Abstände m und p die zu berechnenden Gröfsen, also:

$$m = M \frac{b}{B} \qquad\qquad p = P \frac{l}{L}$$

wonach der Punkt eingetragen werden kann.

Erste Abteilung.

Netzentwurfslehre.

Allgemeines über Abbildungen.

1. Die **Projektionen** sind aus dem Bedürfnis entstanden, die ganze Erdoberfläche oder Teile derselben im verkleinerten Mafsstabe in handlicher Form abzubilden und dabei der Forderung zu genügen, dafs das Abbild, die Karte, in geometrischer Hinsicht möglichst gleiche Eigenschaften mit dem Urbild habe. Die Erdoberfläche besteht aus Teilen von verschiedener physischer Beschaffenheit, d. h. verschiedener stofflicher Unterlage, verschiedener Art der Bearbeitung oder Kultur, verschiedener Bestimmung und Wichtigkeit. Solche Flächenteile sind durch Linien, die in der Erdoberfläche liegen und entweder deutlich bezeichnet oder nur gezogen gedacht werden, von einander getrennt; diese Linien verzweigen sich in einzelnen Punkten; aufserdem können noch vereinzelte Punkte in den Flächen von besonderer Bedeutung sein. Die Aufgabe der Abbildung ist deshalb die Wiedergabe eines auf der Oberfläche liegenden Linien- und Punktnetzes. Da irgend ein beliebiger Punkt der Erdoberfläche durch seine geographische Breite und Länge unzweideutig gegeben ist und in dem Netz der Parallelkreise und Meridiane rasch wieder aufgefunden werden

kann, so kann man die Aufgabe im wesentlichen als gelöst betrachten, wenn man dieses letztere Netz abgebildet hat. Über das Verfahren, um in das abgebildete geometrische Netz die unregelmäfsigen Linien und Punkte der Erdoberfläche einzutragen, ist dann schliefslich nur noch weniges hinzuzufügen. Die Grundaufgabe wird immer die sein, einen beliebig gegebenen Meridian und einen beliebig gegebenen Parallelkreis abzubilden; denn wenn man jeden beliebigen abbilden kann, kann man alle abbilden.

Da alle Abbildungen von gröfseren Teilen der Erdoberfläche nur in bedeutender Verkleinerung ausgeführt werden, so ist es niemals nötig auf die kleinen Unregelmäfsigkeiten in der Gestalt der Netzlinien Rücksicht zu nehmen, da dieselben bei der Reduktion unmerklich werden. Es ist sogar für sehr viele Zwecke genügend, die Erde als vollkommene Kugel zu betrachten und demgemäfs das Kugelnetz abzubilden. In der nachfolgenden Darstellung wird dieses Netz durchweg zu Grunde gelegt werden. Nur bei denjenigen Projektionen, welche für sehr genaue Karten (Küstenkarten, Generalstabskarten u. s. w.) zur Anwendung kommen, werden diejenigen Modifikationen kurz besprochen werden, welche durch Annahme eines Rotationsellipsoids als Erdgestalt bedingt werden. Hievon abgesehen werden zukünftig geographische und geozentrische Breite als identisch betrachtet, d. h. als geographische Breite eines Orts der Winkel angenommen werden, den der nach dem Ort gezogene Radius mit der Äquatorialebene bildet (vgl. S. 13).

2. Von der Erdkugelfläche kann eine in jeder Hinsicht zufriedenstellende **Abbildung nur auf einer Kugeloberfläche** ausgeführt werden. Denkt man sich nämlich letztere, die Bildkugel, konzentrisch mit ersterer und nach jedem abzubildenden Punkt P der Erde einen Radius gezogen (Fig. 12), so schneidet dieser die Bildkugelfläche in einem Punkte p, der als Bild jenes angenommen werden kann. Je 2 Punkte P und P' des Originals und die zugehörigen Bildpunkte p und p' haben dann die Eigenschaft, dafs die Bogenlängen PP' und pp' sich verhalten wie die Radien R und r. Nimmt man noch einen dritten mit P und P' nicht in derselben Ebene gelegenen Punkt P'' hinzu, so gilt derselbe Satz für die Bogen PP'' mit pp'', sowie $P'P''$ mit $p'p''$ und man hat 2 ähnliche sphärische Dreiecke $PP'P''$ und $pp'p''$ auf beiden Kugeln, so dafs also auch die 3 Winkel dieser Dreiecke einander gleich

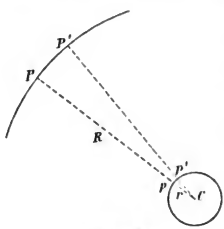


Fig. 12.

sind. Da man jede beliebige Figur auf einer Kugelfläche zusammengesetzt denken kann aus lauter Stückchen gröſster Kreise, so kann man jede Figur in sphärische Dreiecke zerlegt denken, wovon sich jedes auf der Bildkugel ähnlich, d. h. mit gleichen Winkeln und Seitenverhältnissen abbildet. Folglich wird überhaupt jede Figur auf der Erdkugel geometrisch ähnlich auf der Bildkugel abgebildet. Man nennt diese Eigenschaft der Abbildung Konformität oder (nach Breusing's glücklicher Verdeutschung) Winkeltreue, nach Tissot Autogonalität*). Das Verkleinerungsverhältnis oder der Maſsstab für jede Länge der Kugel ist durch das Radienverhältnis $r:R$ gegeben. Denkt man sich auf der Erdkugel ein kleines Quadrat gezogen, dessen Seite $= a$ ist, so entspricht ihm ein Bildquadrat, dessen Seite $= a \frac{r}{R}$ ist. Während der Flächeninhalt jenes $= a^2$, so ist der des Bildquadrates $= a^2 \frac{r^2}{R^2}$. Da man sich jede Fläche auf der Kugel in ein (je nach Bedürfnis sehr engmaschiges) Quadratnetz eingeteilt denken kann, wovon sich jedes einzelne Quadrat im Verhältnisse $\frac{r^2}{R^2}$ an Flächeninhalt verkleinert abbildet, so sieht man daraus, daſs sich alle Flächenteile der Kugel in demselben Verhältnisse verkleinert abbilden, also ihr gegenseitiges Gröſsenverhältnis nicht ändern. Diese Eigenschaft der Abbildung nennt man Äquivalenz oder (nach Breusing) Flächentreue. (Tissot nennt solche Projektionen authalique.)

Die Abbildung auf der Bildkugel stimmt in allen ihren Eigenschaften mit dem Original völlig überein, sie ist nur im Maſsstab von $r:R$ verkleinert. Eine solche zugleich winkeltreue und flächentreue Abbildung läſst sich aber nur auf einer Kugeloberfläche erreichen. Ein Globus gestattet deshalb die beste Darstellung der Erdoberfläche.

Das praktische Bedürfnis macht aber die Projektion auf die ebene Fläche des Papiers oder einer Tafel unabweislich. Man muſs also die Abbildung des Kugelnetzes auf eine Ebene genauer studieren.

Zur Vereinfachung des Ausdrucks soll im folgenden die Annahme gemacht werden, es sei die Erde auf einen Globus in einer gegebenen Verkleinerung abgebildet, und die Aufgabe sei nun die der Projektion von dem Globus auf eine Ebene. Man wird auf diese Weise der Notwendigkeit, von der allgemeinen Verkleinerung aller Dimensionen zu sprechen, enthoben.

3. Bei der **Abbildung auf einer Ebene** ist zu bemerken, daſs

*) Die von Tissot in seinem Werke Sur la représentation des surfaces, wovon später eingehender die Rede sein wird, gegebene Nomenklatur zeichnet sich durch groſse Konsequenz aus. Seine Benennungen werden deshalb hier in Klammern beigefügt.

eine Ebene mit einer Kugelfläche nur in einem Punkte zusammenfallen kann, nämlich, wenn sie Tangentialebene ist, im Berührungspunkte. Je weiter man sich von diesem entfernt, um so gröſser wird der Abstand von Kugel und Ebene. Wollte man also eine ähnliche Art der Projektion wählen, wie zuvor, nämlich durch Radien vom Kugelmittelpunkt C, so würde ein kleiner Kugelbogen s (Fig. 13), der vom Berührungspunkt M ausgeht, durch ein ihm nahezu gleich langes Stück σ dargestellt werden, während ein gleich langer Bogen an der Stelle s' durch die viel längere Strecke σ' abgebildet würde. Das Verkleinerungsverhältnis wird also an verschiedenen Stellen der Karte verschieden.

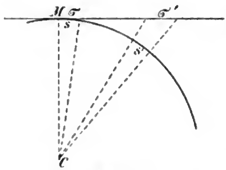


Fig. 13.

Allein auch wenn man von dem Berührungspunkte aus die wahren Bogenlängen auf die Ebene abtragen wollte, so z. B. daſs die Länge MB' (Fig. 14) gleich der Bogenlänge MB und $MD' =$ Bogen MBD ist (woraus auch $B'D' = BD$ folgt), so würde doch die Abbildung, obwohl sie die Eigenschaft der Äquidistanz vom Mittelpunkt (Automekoismus nach Tissot) besitzt, doch nicht in allen Richtungen denselben Maſsstab haben, denn denkt man sich auf der Kugeloberfläche durch B einen Kreis gelegt, dessen Punkte sämtlich den Abstand MB von M haben — wenn M der Pol wäre, würde dieser Kreis ein Parallelkreis sein —, so ist der mit dem Radius MB' in der Ebene beschriebene Kreis die Abbildung des vorigen. Diese Kreise sind aber nicht gleich, denn der erstere hat den kleineren Halbmesser $A'B$, der gefunden wird, indem man von B eine Senkrechte auf den Erdradius MC fällt. Bildet man also z. B. ein schmales gleichschenkliges Dreieck, dessen Spitze in M liegt und dessen Basis der n^{te} Teil des Kreises durch B ist, so entspricht diesem in der Abbildung ein ebensolches Dreieck, dessen gleiche Seiten $MB' = MB$ sind und dessen Basis der n^{te} Teil des durch B' gelegten Kreises ist. Da diese beiden Kreise von verschiedener Länge sind, sind auch ihre n^{ten} Teile von verschiedener Länge; folglich erscheint die Basis des Kugeldreiecks auf der Bildebene vergröſsert, während die Seiten ungeändert bleiben. Diese Abbildungsart ist also jedenfalls keine winkeltreue.

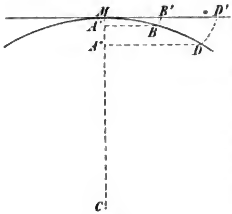


Fig. 14.

Der Umstand, daſs die Verzerrungen zunehmen, je weiter man

sich von dem Berührungspunkt der Ebene mit der abzubildenden Kugelfläche entfernt, hat zu dem Gedanken geführt, die **Abbildung auf abwickelbare Flächen** zu versuchen, d. h. auf solche krumme Flächen, die ohne weiteres in die Ebene ausgebreitet werden können, aber mit der Kugel nicht nur einen Punkt, sondern eine krumme Linie gemein haben. Die einfachsten dieser Oberflächen sind der gewöhnliche Kegel und der Cylinder, der als spezieller Fall des Kegels, nämlich als sehr spitzer Kegel mit unendlich entfernter Spitze, betrachtet werden kann. Jeder Kegel kann jede beliebige Kugel in einem Kreise berühren, man braucht nur den Kugelmittelpunkt auf die Kegelachse zu legen und längs derselben so lange zu verschieben, bis die Berührung eintritt. Von einem Cylinder kann eine Kugel nur in ihrem gröfsten Kreise berührt werden; der Querschnitt des berührenden Cylinders mufs also jenem gleich sein. — Aber auch jeder die Kugel schneidende Kegel oder Cylinder hat mit derselben die Schnittkreise gemein, kann also mit demselben Vorteil zur Abbildung benutzt werden. Schneidet man den Kegel- oder Cylindermantel längs einer Erzeugungslinie auf, so läfst er sich in die Ebene ausbreiten. Hierbei behält jedes Bogenstück des gewesenen Berührungs- oder Schnittkreises seine Länge ungeändert bei, nur die Krümmung wird verändert. Der schmale Streifen, der diese Linie auf der Erdoberfläche unmittelbar einschliefst, kommt deshalb auf der abgewickelten Kegelfläche unverzerrt zur Darstellung. Dieser Streifen ist also desselben Vorzugs teilhaftig, den bei der direkten Projektion auf eine Berührungsebene nur die unmittelbare Umgebung des Berührungspunktes geniefst. — Man nennt die hierher gehörigen Projektionen abwickelbare. Sie werden im zweiten Kapitel zusammen behandelt werden.

4. Mögen die Projektionen nun direkt auf die Ebene, oder zunächst auf die abwickelbare Fläche ausgeführt werden, immer lassen sich die verschiedensten Gesetze vorschreiben, nach welchen die Abbildung geschehen soll. Abbilden heifst ja im allgemeinen nur, jedem Punkte des Originals einen Bildpunkt zuordnen, und das kann auf unendlich verschiedene Weise geschehen. Es könnte ganz willkürlich jedem Punkte ein Bildpunkt entsprechend angenommen werden. Diese Zuordnung nach bestimmtem Gesetze vorzunehmen ist nur nötig, wenn das Bild gewisse Anforderungen erfüllen soll, deren schon einige erwähnt worden sind; z. B. die **Winkeltreue** (Konformität), die **Flächentreue** (Äquivalenz), die **Mittabstandstreue** (Äquidistanz).

Konformität kann bei der Abbildung der Kugel auf einer Ebene nie in derselben Ausdehnung erreicht werden, wie bei der Abbildung auf eine Fläche gleicher Gattung (Kugel auf Kugel, Ebene auf Ebene). Bei Abbildung einer Fläche auf eine Fläche anderer Gattung kann

Ähnlichkeit nur in den kleinsten Teilchen erlangt werden, d. h. man kann erreichen, dafs ein an einer beliebigen Stelle der Abbildung gewähltes sehr kleines Dreieck ähnlich dem entsprechenden des Urbilds wird, wobei vorausgesetzt ist, dafs die Seiten des Urdreiecks hinlänglich klein sind, um als gerade Linien angesehen werden zu können.

Eine Folge der Konformität auch in diesem beschränkteren Sinne ist, dafs beliebige von einem Punkte des Originals aus gezogene Richtungen dieselben Winkel miteinander bilden, wie die entsprechenden Richtungen in der Abbildung; dafs also mit anderen Worten alle Winkel in Urbild und Abbild übereinstimmen. Diese Projektionen können deshalb mit vollem Rechte winkeltreue genannt werden. Ferner aber erscheinen alle von einem Punkt aus nach beliebigen Richtungen gemessenen Längen, sofern sie nur klein genug genommen werden, in demselben Verhältnisse verkleinert, während freilich dieses Verhältnis, der Mafsstab, von Punkt zu Punkt ein anderer ist.

Durch die Forderung der Winkeltreue allein ist eine Projektion noch nicht bestimmt; es giebt unendlich viele winkeltreue Abbildungsarten. Ebensowenig ist eine Projektion völlig bestimmt durch die Forderung der Flächentreue, d. h. die Bestimmung, dafs die Flächengröfse entsprechender Figuren in Urbild und Abbild übereinstimmen sollen oder durch die Forderung der Äquidistanz von der Kartenmitte. Zwei dieser Forderungen gemeinsam können nur bei Abbildung auf gleichartigen Flächen (Ebene auf Ebene, Kugel auf Kugel), niemals aber bei dem Problem erfüllt sein, das hier zu behandeln ist. Da Äquidistanz überhaupt nur für die Abstände von dem Kartenmittelpunkt erreicht werden kann, so hat diese Grundeigenschaft eine untergeordnete Bedeutung im Vergleich mit den beiden anderen. Vom mathematischen Gesichtspunkt aus betrachtet liefert die Winkeltreue die interessantesten Abbildungsprobleme. Für die praktische Kartographie ist aber die Flächentreue weit wichtiger, weil geographische Vergleiche zunächst an Erscheinungen anknüpfen, die über flächenhaft ausgedehnte Gebiete ihre Gleichartigkeit oder Verschiedenheit offenbaren und weil das Planimeter in der Hand des Geographen ein Instrument von zunehmender Wichtigkeit ist.

5. Hält man an den 2 Hauptabteilungen der Projektionen auf die Ebene und auf den Kegel (einschliefslich des Cylinders) fest und betrachtet zunächst die Projektion auf eine Ebene, welche ein für allemal die Mitte des darzustellenden Kugelgebiets berühren soll, so bietet sich, wenn man nicht irgend eine Richtung auf der Kugel ganz willkürlich bevorzugen will, als erstes Abbildungsprinzip das dar, dafs alle Punkte, die in gleicher Entfernung von dem Berührungspunkte, also auf einem Kreise um denselben liegen, auch in der Abbildung

auf einem Kreise um die Kartenmitte liegen sollen, und dafs die Gestalts- und Flächenraumänderungen, die irgend ein kleines Flächenstückchen z. B. ein sehr kleines Dreieck erfährt, nur von seiner Entfernung von der Mitte, nicht aber von seinem Azimut abhängen sollen. Unter Azimut wird hier der Winkel des von der Kartenmitte nach dem Dreieckchen gezogenen Bogens gegen die Nordrichtung verstanden. Wird das genannte Prinzip festgehalten, so finden an allen Punkten eines um die Kartenmitte beschriebenen Kreises gleiche Verzerrungen statt. Liegt überdies jeder Punkt vom Berührungspunkt aus auf Kugel und Karte in demselben Azimut, so bildet sich jeder durch den Berührungspunkt gelegte gröfste Kreisbogen als gerade Linie ab. Man nennt deshalb diese Projektionen **azimutale**. Projektionen, denen jenes Prinzip nicht zu Grunde gelegt ist, wo also einzelne Richtungen willkürlich bevorzugt sind, werden seltener und meist nur wegen der Bequemlichkeit der Zeichnung benutzt. Man kann sie als „konventionelle Projektionen" auffassen. Das erste Kapitel handelt deshalb fast ausschliefslich von azimutalen Projektionen, die auch zenitale genannt werden, weil an allen Punkten gleichen Zenitabstandes von der Mitte, d. h. gleichen Winkels der Lotlinie mit dem Mittellot, dieselben Veränderungen stattfinden*). — Ebenso konsequent ist die von Tissot gewählte Bezeichnung dieser Projektionen als zentrale, die aber wegen leichter Verwechslung mit der gnomonischen oder Zentralprojektion hier nicht weiter gebraucht werden wird.

Welche Projektion man für eine Karte wählt, hängt vor allem von dem Zwecke ab, dem die Karte dienen soll. Die Vorzüge und Nachteile der einzelnen Projektionen im Hinblick auf ihre Anwendung werden an ihrem Ort hervorgehoben werden. Im allgemeinen kann ausgesprochen werden, dafs die Unterschiede der Projektionen um so geringer werden, je kleiner das darzustellende Stück der Erdoberfläche ist, weshalb man sich bei der Wahl des Netzes zur Darstellung kleiner Landesteile häufig nur von der Rücksicht auf die Bequemlichkeit der Zeichnung leiten läfst. Bei Darstellung gröfserer Länder ist es meist die Gestalt des Landes, welche bei der Wahl vorzugsweise bestimmend wirkt, wovon später noch die Rede sein wird.

6. Zum Messen der Längen auf der Karte in Meilen- oder Kilometermafs mittels des Zirkels wird die Beisetzung eines **verjüngten Mafsstabs** erfordert, d. h. einer Geraden, auf welcher diejenige Strecke, welche auf der Karte die Wegemafseinheit (1 Ml oder 1 km) darstellt, mehrmals aufgetragen, unter Umständen auch noch in Unterabteilungen

*) Zenitale Abbildungen brauchen nicht notwendig azimutal zu sein. Eine nicht azimutale Zenitalprojektion hat Wiechel vorgeschlagen in Der Civilingenieur Bd. 25 (1879) S. 408, s. insbesondere Taf. XXII.


Fig. 15.

(Zehntel) eingeteilt ist. Wäre der Mafsstab der Karte 1 : *n*, so würde das Kilometer in der Verjüngung die Länge von 1000 : *n* Meter erhalten, also wenn z. B. $n = 1\,000\,000$ wäre, 1^{mm} lang werden. Die Länge der deutschen Meile beträgt 7420^{m}, ihre verjüngte Länge würde also in Metern ausgedrückt $= 7420 : n$ und im Mafsstab von 1 : 1 000 000 $7{,}42^{mm}$ werden. Über bequeme Einrichtung eines solchen Mafsstabs mit Transversalen siehe den Anhang.

Nachdem mehrfach darauf hingewiesen worden, dafs bei Projektion gröfserer Teile der Erdoberfläche das Verkleinerungsverhältnis der Längen an verschiedenen Stellen der Karte sich ändert, leuchtet ein, dafs für solche Darstellungen eine Reihe von Meilenmafsstäben beigesetzt werden müfsten, um sie für die verschiedenen Stellen zu benutzen. Wenn die Projektion nicht konform ist, würden sogar Längen, die von einem Punkt aus nach verschiedenen Richtungen hin sich erstrecken, mit verschiedenem Mafsstabe zu messen sein. Aus diesem Grunde giebt man Karten von g r ö f s e r e n Teilen der Erdoberfläche häufig gar keinen Mafsstab bei, solchen von kleineren Teilen aber den mittleren Mafsstab.

Auf jeder Karte sollte das im Mittel giltige Verjüngungsverhältnis angegeben sein. Auf Karten, wo diese Angabe fehlt, kann man leicht durch Messung der Länge eines Meridiangrades das Verhältnis bestimmen. Da ein mittlerer Meridiangrad $= 111\,121^{m}$ ist, so hat man die abgemessene in Metern ausgedrückte Länge nur durch vorstehende Zahl zu dividieren, um das Verjüngungsverhältnis zu haben. Diese Division wird erspart durch den Mafsstab Fig. 15, der die Gradlänge für jedes Verjüngungsverhältnis von 1 : 600 000 bis zu 1 : 100 Millionen angiebt. Man braucht nur auf der Karte einen Grad in den Zirkel zu nehmen und den einen Zirkelfufs dann in den oberen Anfangspunkt des Mafsstabs einzusetzen; an der anderen Spitze liest man dann die Verjüngungszahl ab. — Eine ausführliche Tabelle für die Gradlänge in den gebräuchlichsten Kartenmafsstäben von Wagner findet sich im Geogr. Jahrbuch III (1870) Seite L.

7. Es erübrigt noch, die wichtigste **Litteratur der Projektionslehre** hier anzugeben, wobei aber eine Beschränkung auf diejenigen Werke nötig ist, die den Gegenstand mit einiger Vollständigkeit behandeln, denn die Zahl der Arbeiten über einzelne Projektionen ist ungemein grofs. Die Erfin-

dung einzelner Projektionen reicht bis in das griechische Altertum hinauf. Eine historische Zusammenstellung bietet:

D'Avezac, Coup d'oeil historique sur la projection des cartes de géographie. Bulletin de la Société de Géographie de Paris, 5me série T. V (1863) p. 257, 438;

auch die untengenannten Hand- und Lehrbücher von Germain und Gretschel geben ziemlich vollständige geschichtliche Daten über die einzelnen Entwurfsarten.

Die neuere Epoche der Projektionslehre beginnt mit den Originalarbeiten Lambert's, die enthalten sind in:

Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik, Berlin 1772. Teil III. S. 105.

Die Theorie der konformen Abbildungen hat aber ihre richtige mathematische Grundlage erst durch Gaufs' berühmte Abhandlung erhalten:

Gaufs, Allgemeine Lösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dafs die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird. Preisarbeit der Kopenhagener Akademie 1822. Schumachers Astronomische Abhandlungen, Heft III, Altona 1825.

Während die Gesamtwissenschaft nach dem Stande vor Gaufs in diesem Jahrhundert zum erstenmal zusammengefafst wurde in:

Tobias Mayer, Unterricht zur praktischen Geometrie, Teil IV. 2. Aufl. Erlangen 1804,

wurde sie in der durch Lagrange's und Gaufs' Arbeiten ermöglichten allgemeineren Auffassung zum erstenmal dargestellt in:

J. J. Littrow, Chorographie oder Anleitung, alle Arten von Land-, See- und Himmelskarten zu verfertigen; Wien 1833,

einem noch heute sehr lesenswerten Buche, das trotz dem berühmten Namen seines Verfassers wenig gekannt zu sein scheint, denn man findet es kaum je zitiert. Es enthält ein schätzbares Verzeichnis der bisherigen Litteratur. — Für weitere Verbreitung der Fertigkeit in Herstellung der einfachsten Projektionen im Kreise der Lernenden hat sehr günstig die kurze elementare Darstellung in:

A. Steinhauser, Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkartenprojektion, Wien 1857, 2. Aufl. 1880,

gewirkt.

Moderne umfassende Lehr- und Handbücher sind:

Germain, Traité des projections des cartes géographiques. Paris 1866,

sehr vollständig und in vortrefflicher Anordnung und Entwicklung;

Gretschel, Lehrbuch der Kartenprojektion. Weimar 1873,

vorzugsweise auf das vorhergehende gestützt, nur mehr in lehrhafter Darstellung und historisch mehrfach ergänzt;

Fiorini, Le projezioni delle carte geografiche, mit Atlas. Bologna 1881.

Unvollendet geblieben und nur auf die perspektivischen Projektionen beschränkt ist:

R. Doergens, Theorie und Praxis der geographischen Kartennetze. I. Teil, die perspektivischen Projektionen. Berlin 1870.

Nicht ein Kompendium in demselben Sinne wie die vorigen, sondern eine Untersuchung der bei den Abbildungen hervorgebrachten Deformationen, begründet auf eine neue Art der Analyse derselben, und somit eine notwendige Ergänzung aller Kompendien ist:

A. Tissot, Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Paris 1881; teilweise zuvor in den Nouvelles annales de mathématiques 1878—1880 erschienen;

ein Werk von höchster Bedeutung sowohl in theoretischer als auch namentlich in praktischer Beziehung, dessen Verständnis und Verwertung von seiten der ausübenden Kartographen hoffentlich durch diesen Leitfaden etwas gefördert wird.

Zum Schlusse ist noch hinzuweisen auf:

S. Günther, Die Kartenprojektionslehre im Verlaufe des letzten Jahrzehntes; Geogr. Jahrbuch IX (1882) S. 407;

einen reichhaltigen Bericht über die litterarischen Erscheinungen der der letzten zehn Jahre auf dem ganzen Gebiete.

Erstes Kapitel: Projektionen auf die Ebene.

I. Azimutale (zenitale) Projektionen.

A. Perspektivische Projektionen.

Um eine Figur von der Kugeloberfläche auf eine Ebene zu projizieren liegt nichts näher, als dasselbe Verfahren anzuwenden, welches zur Aufzeichnung irgend eines räumlichen Gebildes, z. B. einer Landschaft, fast immer benutzt wird, die **perspektivische Zeichnung.** Man denkt sich dabei die Sehstrahlen, die von dem Auge nach den sämtlichen Punkten des Urbildes gehen, durch die Zeichnungsebene geschnitten und nimmt den Bildpunkt zu jedem an der Stelle an, wo der betreffende Sehstrahl die Zeichnungsebene schneidet. Die Stellung dieser Ebene nimmt man senkrecht zu dem Strahl, der die Mitte des darzustellenden Gebietes trifft. Um also einen Teil MN der Erdoberfläche perspektivisch aufzuzeichnen, wird man auf dem durch die Mitte des darzustellenden Teils gezogenen und verlängerten Radius CP (Fig. 16) irgendwo, z. B. in O das Auge annehmen, Sehstrahlen nach den sämtlichen darzustellenden Punkten M, 1, 2, 3 ... N ziehen und dieses Strahlensystem durch die zu CO senkrechte Zeichnungsebene ZE schneiden. Die Schnittpunkte M', 1', 2' ... N' sind dann die Bildpunkte von M, 1, 2 ... N.

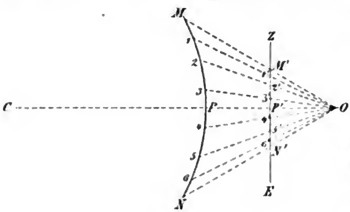


Fig. 16.

Eine Verschiedenheit des Bildes kann nur bedingt sein durch die verschiedene Lage des Punktes O gegen die Kugeloberfläche. Dagegen ist die Entfernung der Zeichnungsebene von P und von O für den Charakter des Bildes gleichgiltig. Rückt man dieselbe weiter von O weg, so verändert das Bild nur seinen Mafsstab; es wird gröfser, bleibt aber sich selbst ähnlich, denn die von einem beliebigen Strahlensystem auf 2 parallelen Ebenen E und E' gebildeten Abschnitte $abcd$, bez. $a'b'c'd'$ (Fig. 17) stehen wegen der ähnlichen Dreiecke, die ihre Spitze in O haben, sämtlich in demselben Verhältnisse

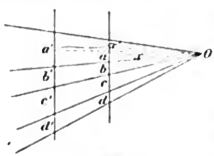


Fig. 17.

$$a : a' = b : b' = c : c' = \ldots = x : x'$$

wo x und x' die Entfernungen der Ebenen E und E' vom Punkte O sind. Es ist deshalb auch $a : b : c : d = a' : b' : c' : d'$, welche Proportion sich auf alle gegenseitigen Entfernungen innerhalb der beiden Bildebenen ausdehnen läfst. Im folgenden wird die Bildebene meist als Tangentialebene in der Mitte des darzustellenden Teils der Kugel, also im Punkt P (Fig. 16), oder auch durch den Mittelpunkt der Kugel gelegt angenommen werden.

Einige geometrische Eigenschaften der perspektivischen Projektion folgen unmittelbar aus ihrer Definition. Dafs alle azimutal sind, darüber kann kein Zweifel bestehen, denn jeder Strahlenkegel, der von O (Fig. 16) als Spitze durch einen Kugelkreis gelegt wird, der P zum Pol hat, schneidet auch die Zeichnungsebene in einem Kreis, dessen Mittelpunkt P' ist. — Ein Punkt projiziert sich als Punkt, eine ununterbrochene Reihe von Punkten projiziert sich wieder als solche Reihe, d. h. jede Linie wird als Linie abgebildet. Eine gerade Linie wird wieder als Gerade abgebildet, denn die von dem Augpunkt nach den einzelnen Punkten jener gezogenen Strahlen liegen sämtlich in der durch den Augpunkt und jene Gerade gelegten Ebene. Diese Ebene schneidet aber die Bildebene in einer Geraden, welche also die sämtlichen Bildpunkte der Geraden des Urbilds enthält. Hieraus schliefst man aber weiter, dafs auch jede Kurve des Urbilds, falls sie in einer durch das Auge gehenden Ebene liegt, sich als Gerade abbildet. Beifolgende Zeichnung sei in dieser Ebene entworfen, in welcher sowohl die Kurve KU (Fig. 18) als das Auge O liegen. ZE sei die Durchschnittslinie mit der Zeichnungsebene. Dann projizieren sich alle Punkte der Kurve: K, 1, 2, 3, U in die Punkte K', 1′, 2′, 3′, U' dieser Geraden.

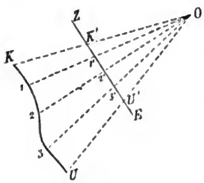


Fig. 18.

Die Netzlinien auf der Kugeloberfläche sind ausschliefslich Kreise; man hat also die für alle perspektivischen Projektionen giltigen Sätze:

1) Alle Kreise der Kugeloberfläche, deren Ebenen durch das Auge gehen, stellen sich in der Karte als gerade Linien dar.

2) In jeder perspektivischen Projektion mufs ein Meridian sich als Gerade darstellen; denn es läfst sich immer durch das Auge und die Erdachse eine Ebene legen; eine solche schneidet aber die Erdoberfläche in einem Meridian, weil

jede durch die Erdachse gelegte Ebene eine Meridianebene ist.

Den Inbegriff der Strahlen, die zur Projektion einer Figur dienen, nennt man deren Projektionskegel. Der Augpunkt ist die Spitze dieses Kegels, die Durchschnittslinie desselben mit der Zeichnungsebene ist die Projektion, das Bild der Figur. Man sieht daraus, dafs ein Polygon sich im allgemeinen wieder als ein Polygon, eine Kurve als Kurve projizieren wird. Ist das Polygon ein geradliniges, so ist der Projektionskegel eine Pyramide. Ist ein Kreis KR zu projizieren, so ist der Projektionskegel ein gewöhnlicher Kegel zweiten Grades. Die Projektion $K'R'$ kann ein Kreis nur dann sein, wenn die Zeichnungsebene ZE parallel der Ebene des Kreises KR ist.

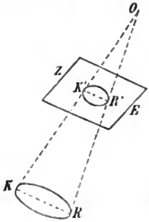


Fig. 19.

Im allgemeinen wird die Abbildung eines Kreises ein Kegelschnitt, eine Ellipse (wovon der Kreis ein Spezialfall), eine Hyperbel oder (in einem ganz speziellen Falle) eine Parabel.

Die am häufigsten vorkommende Projektion des Kreises ist die Ellipse. Um Lage und Gröfse der Achsen einer Ellipse zu beurteilen, die die Projektion eines Kreises von gegebenem Halbmesser und gegebener Neigung i gegen die Zeichnungsebene bildet, denkt man sich diese letztere durch den Mittelpunkt des Kreises gelegt; bei paralleler Verschiebung der Bildebene in irgend eine andere Lage erhält man ja stets ähnliche Figuren. Bei der angenommenen Lage wird die Bildebene von dem abgebildeten Kreise in 2 Punkten A, A' (Fig. 20) geschnitten, die also ihre eigenen Bildpunkte sind. Der sie verbindende Durchmesser bleibt unverkürzt. Liegt das Auge in einer zu diesem Durchmesser senkrechten und durch den Mittelpunkt gehenden Ebene, so wird der in dieser Ebene liegende Durchmesser am meisten verkürzt; jener wird die grofse, dieser die kleine Achse der Ellipse. Die grofse Halbachse ist dann der Kreisradius selbst, die Länge der kleinen Halbachse hängt von der Neigung i und von der Lage des Auges ab. In beistehender Figur sei $ABA'B'$ der abzubildende Kreis, ZE die Zeichnungsebene. Die Kreishälfte ABA' liege über,

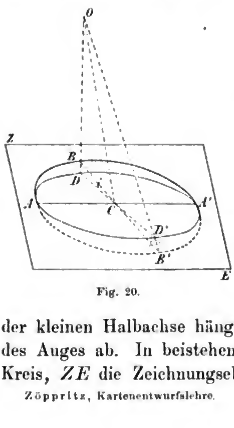


Fig. 20.

die Hälfte $AB'A'$ unter dieser Ebene. Wenn O der Augpunkt ist, so wird die kleine Achse der Ellipse durch die Projektionsstrahlen OBD und $OD'B'$ bestimmt, sie ist also DD', während die grofse Achse AA' ist. Die Länge $CD = CD'$ der kleinen Halbachse hängt, wie man sieht, von dem Neigungswinkel $BCD = i$ zwischen Kreis und Zeichnungsebene, sowie von der Lage des Punktes O ab, von dem der Strahl OBD ausgeht.

Liegt aber das Auge nicht in einer in C senkrecht zu AA' stehenden Ebene, so wird AA' nicht die grofse Achse der Ellipse. — Wie die Lage und Gröfse der Achsen in solchen anderen Fällen gefunden wird, soll, wo sich das Bedürfnis ergiebt, gezeigt werden.

Eine Verschiedenheit perspektivischer Projektionen des Erdkugelnetzes kann nur durch verschiedene Lage des Augpunktes hervorgebracht werden.

Man kann denselben aufserhalb, innerhalb oder auf der Kugelfläche liegend annehmen. In beiden letzteren Fällen mufs man sich freilich die Erdkugel durchsichtig denken, so dafs das Auge die Zeichnung auf der Oberfläche von hinten, d. h. von innen her erblicken kann. Dadurch entsteht der Misstand, dafs man die Länder nicht in der richtigen, sondern in umgekehrter Lage sieht, z. B. Europa rechts von Asien u. s. w.; die Karte würde so erscheinen, wie eine gewöhnliche, die man von der Rückseite im durchgehenden Licht betrachtet. Dieser Misstand läfst sich aber sofort durch Umkehr beseitigen, indem man schon bei der Zeichnung rechts und links vertauscht.

Der einzige ausgezeichnete Punkt der Kugel ist der Mittelpunkt. Nimmt man das Auge zunächst in ihm an, so erhält man die erste perspektivische Projektion die Gnomonische oder Zentral-Projektion, Fig. 21. Die Zeichnungsebene, die hier wie in den folgenden Figuren stets ZE genannt ist, wird im Mittelpunkt M des darzustellenden Teils der Kugeloberfläche berührend angenommen; Punkte B und D der Kugel werden durch Strahlen OBB' und ODD' in B' und D' abgebildet.

Die entgegengesetzte Annahme über die Lage des Augpunktes macht man, wenn man ihn in unendliche Entfernung von der Kugel verlegt. Man erhält dann die orthographische oder Parallelprojektion (Fig. 22), so genannt, weil die von dem unendlich fernen Punkt O herkommenden Strahlen als parallele erscheinen. Die Zeichnungsebene berührt die Kugel in dem Punkte M, wo der vom Mittelpunkt nach O gezogene Strahl die Oberfläche schneidet. Soll ein bestimmter Teil der Kugeloberfläche so dargestellt werden, so mufs also das ferne Auge auf dem durch die Mitte dieses Flächenteils ge-

zogenen Radius (hier CM) angenommen werden. Durch Parallele BB' und DD' erhält man die Projektionen B', D' der Punkte B, D.

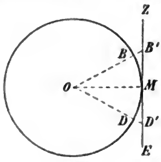


Fig. 21.

Denkt man sich hierbei die Zeichnungsebene parallel bis in den Mittelpunkt geschoben ($Z'CE'$), so erleidet das Bild keine Änderung.

Nimmt man das Auge O in der Kugeloberfläche selbst an, so entsteht die stereographische Projektion (Fig. 23), vermöge welcher man den Teil der Kugelfläche, dessen Mitte der diametral gegenüberliegende Punkt M ist, durch Strahlen OBB', ODD' u. s. w. auf ZE abbilden kann. Bei dieser Abbildungsart denkt man sich die Zeichnungsebene meist durch den Mittelpunkt gelegt, sodafs $Z'E'$ parallel ZE ist und B'', D'' die Bildpunkte von B, D werden.

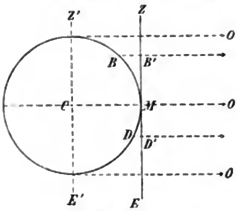


Fig. 22.

Aufser diesen 3 ausgezeichneten Lagen des Augpunktes giebt es noch unendlich viele andere und also unendlich viele Projektionen, die man als interne und externe unterscheiden kann, je nachdem jener Punkt innerhalb oder aufserhalb der Kugel angenommen wird. Zur praktischen Anwendung kommen aber höchstens gewisse externe Projektionen (Fig. 24), wobei der Augpunkt O in geringer Entfernung ($^1/_3$ bis $^3/_4$ des Radius) von der Kugelfläche entfernt liegt und die abgewendete Kugelseite, deren Mitte M ist, durch Strahlen OB und OD auf der durch den Mittelpunkt C gelegten Ebene ZE abgebildet wird.

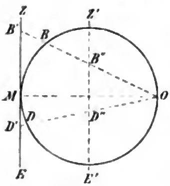


Fig. 23.

Das Bild des Kugelnetzes, welches durch eine perspektivische Projektion entsteht, ist in seiner Gestalt abhängig von der Lage des Mittelpunktes M des abgebildeten Teils im Netze selbst. Die Tangentialebene im Punkte M, oder die durch das Zentrum gelegte Parallelebene, nennt man den Horizont dieses Punktes. Jede perspektivische Projektion ist also eine Horizontalprojektion. Das Netzbild nimmt in 2 besonderen Fällen einen wesentlich vereinfachten Charakter an: 1) wenn der Berührungs-

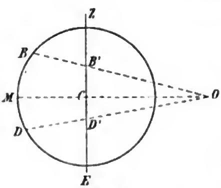


Fig. 24.

punkt M ein Pol ist, die Projektion also auf die Ebene des Äquators stattfindet, — Polarprojektion*) —; 2) wenn der Punkt M dem Äquator angehört, die Projektion also auf die Ebene eines Meridians ausgeführt wird — Äquatorialprojektion (besser Meridianprojektion genannt).

Da sich der Augpunkt stets auf dem durch den Punkt M gezogenen Radius befindet, so liegt er bei jeder perspektivischen Polarprojektion in der Erdachse oder ihrer Verlängerung. Demnach gehen alle Meridianebenen durch das Auge und bilden sich deshalb als gerade durch den Mittelpunkt M gehende Linien ab. Der Winkel, welchen 2 beliebige Meridianebenen in Wirklichkeit mit einander bilden, wird gemessen durch den Winkel ihrer Schnittlinien mit einer zur Erdachse senkrechten Ebene (z. B. dem Äquator). Da nun bei der Polarprojektion die Bildebene gleichfalls senkrecht zur Achse steht, so machen die Durchschnittslinien der Meridiane mit der Bildebene dieselben Winkel wie in Wirklichkeit miteinander. Man kann also für jede perspektivische Polarprojektion die sämtlichen aufzuzeichnenden Meridiane sofort eintragen. Sollen sie von 10 zu 10^0 aufgenommen werden, so zieht man durch den Pol 36 Gerade in Winkeln von je 10^0 gegeneinander, diese stellen die Meridiane dar.

Die Parallelkreise stellen sich bei jeder perspektivischen Polarprojektion als Kreise dar, denn jede Parallelkreisebene steht senkrecht zur Erdachse, in welcher das Auge liegt, der Projektionskegel ist also ein gerader Kreiskegel, der durch jede senkrecht zur Achse stehende Ebene, also auch durch die Zeichnungsebene in einem Kreise geschnitten wird. Der Halbmesser dieses Kreises hängt von der Lage des Auges d. h. von seiner Entfernung vom Kugelmittelpunkt ab. Die verschiedenen perspektivischen Polarprojektionen unterscheiden sich also nur durch den Durchmesser der Kreise, welche die entsprechenden Parallelkreise darstellen.

Bei der Äquatorialprojektion stellt sich der Äquator unter allen Umständen als Gerade dar, weil ja das Auge in einem Äquatorialhalbmesser (bez. seiner Verlängerung) liegt, die Äquatorialebene also durch das Auge geht. Ferner stellt sich der durch M gehende Meridian als Gerade dar. Das Netzbild wird also durch Äquator und Mittelmeridian in 4 symmetrische Viertel geteilt, falls der durch M gehende Mittelmeridian zu den darzustellenden gehört.

Die Bilder der übrigen Meridiane sind bei jeder perspektivischen Äquatorialprojektion Ellipsen, denn sie sind Schnitte je eines Kegels,

*) Die Benennung Äquatorialprojektion, deren sich auch Tissot bedient, wäre hiefür bezeichnender, wird indessen zur Vermeidung von Verwechslungen besser nicht angewandt.

dessen Achse der durch M gehende, also zur Bildebene senkrecht stehende Radius ist, und der einen Kreisschnitt (den wirklichen Kugelmeridian) besitzt. Die kleinen Achsen dieser sämtlichen Ellipsen liegen in der Geraden, die den Äquator darstellt. Die Fig. 25 sei in der Ebene des Äquators der Kugel entworfen. C sei der Kugelmittelpunkt, O der Augpunkt. Jeder Meridian schneidet die Papierebene in einem Durchmesser $F'G$, denn die Erdachse steht in C senkrecht auf der Papierebene. Die Projektion des Durchmessers FG ist $F'G'$.

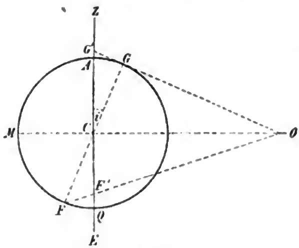


Fig. 25.

Dieser Durchmesser des Kreises wird am stärksten verkürzt, weil er unter allen die gröfste Neigung (nämlich i) gegen die Zeichnungsebene ZE hat. $F'G'$ ist folglich die kleine Achse der Ellipse. In der Karte fällt die Richtung dieser Achse mit der Geraden AQ zusammen, welche in der Zeichnung den Äquator AMQ darstellt. Die grofse Achse ist demnach parallel der Geraden, die den Mittelmeridian darstellt, fällt aber im allgemeinen nicht mit diesem zusammen.

Die Parallelkreise werden sämtlich Ellipsen, wenn der Augpunkt aufserhalb oder auf der Kugeloberfläche liegt; sämtlich Hyperbeln, wenn er im Mittelpunkt der Kugel liegt, denn in diesem Falle hat der Projektionskegel der Parallelkreise AB und $A'B'$ (Fig. 26) seine Spitze im Kugelmittelpunkt C und seine Achse ist die Erdachse NS. Die dieser parallele Zeichnungsebene ZE schneidet den Kegel in einer Hyperbel, deren Scheitel in D und D' liegen.

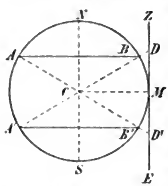


Fig. 26.

1. Gnomonische oder Zentralprojektion. Projiziert man die Punkte der Kugeloberfläche durch Strahlen, die vom Mittelpunkte ausgehn, auf eine Ebene, die das darzustellende Gebiet in der Mitte berührt, so erhält man die Zentralprojektion des Gebiets.

> Da alle gröfsten Kreise der Kugel durch den Augpunkt gehn, so bilden sie sich sämtlich als gerade Linien ab.

Dies ist die Haupteigenschaft der Zentralprojektion, welche ihre Konstruktion sehr erleichtert. Die Meridiane sind gröfste Kreise, deren Ebenen sich alle in der Erdachse schneiden, sie bilden sich also auf

der Zeichnungsebene als Geraden ab, die alle durch denjenigen Punkt gehn, wo die verlängerte Achse diese Ebene schneidet, also durch den Bildpunkt des Pols.

Die beistehende Fig. 27 dient zur Erläuterung der gnomonischen Projektion eines Gebiets, dessen Mitte M unter der geographischen Breite α gelegen ist, und ist in der Meridianebene des Punktes M gezeichnet. C sei der Mittelpunkt, r der Radius der Kugel, ZE die Durchschnittslinie der Kartenebene mit derjenigen der Figur, AQ der Äquator. Dann ist P' die Projektion des Pols P und A' die Projektion des Punktes A, wo der Äquator von dem Meridian des Punktes M, dem Mittelmeridian der Karte, geschnitten wird.

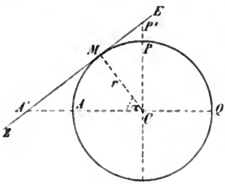


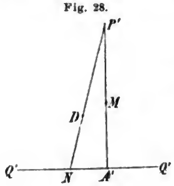
Fig. 27.

Die Ebene des Äquators, welche senkrecht auf derjenigen der Figur steht und die Kartenebene ZE, welche gleichfalls senkrecht zur Papierebene steht, schneiden sich also in einer durch A' gehenden und senkrecht zu derselben Ebene stehenden Geraden, die das Bild des Äquators auf der Karte ist. Aus den rechtwinkligen Dreiecken $A'MC$ und MCP', in welch letzterem der Winkel bei P' auch $= \alpha$ ist, ergeben sich folgende einfache Beziehungen

$$A'M = r \operatorname{tg} \alpha; \quad MP' = r \operatorname{ctg} \alpha; \quad A'C = \frac{r}{\cos \alpha}; \quad CP' = \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Der Kartenentwurf beginnt damit, dafs man von einem angenommenen Punkte P' (Fig. 28), dem Bilde des Pols, aus von oben nach unten eine Gerade, den Mittelmeridian, zieht und darauf die Längen $P'M$ und MA' aufträgt, die entweder aus Fig. 27 entnommen oder aus vorstehenden Formeln berechnet werden. Durch A' wird dann die Senkrechte $Q'Q'$, das Bild des Äquators, gezogen. Da alle Meridiane sich als gerade durch P' gehende Linien darstellen, so können sie gezogen werden, sobald ihre Durchschnitte auf $Q'Q'$ bekannt sind. Diese Durchschnitte erhält man aus einer Hilfszeichnung in der Äquatorebene (Fig. 29). Die Punkte C, A, A' seien dieselben wie bisher. Die geographische Länge der Kartenmitte des Punktes M ist eine bekannte, sie sei $= \mu$ nach Westen hingezählt. Dann macht der Mittelmeridian CA mit dem Nullmeridian den Winkel $\mu = ACO$. Der Null-

Fig. 28.



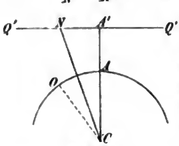


Fig. 29.

meridian CO kann also angegeben werden und von ihm aus jeder andere Meridian von der geographischen Länge λ, indem man von CO aus den Winkel $\lambda = OCN$ anträgt. Durch Verlängerung des zugehörigen Radius bis zum Schnittpunkte N mit dem Äquatorbild $Q'Q'$ erhält man auch den Abstand $A'N$ des Schnittpunktes dieses Meridians vom Punkte A' der Karte. Überträgt man diese Länge:

$$A'N = A'C \operatorname{tg}(\mu - \lambda) = \frac{r \operatorname{tg}(\mu - \lambda)}{\cos \alpha}$$

in das Kartenbild Fig. 28, so kann man den λ^{ten} Meridian $P'N$ ohne weiteres ausziehen. Soll z. B. nur je der fünfte Meridian ausgezogen werden, so trägt man von CO aus die Winkel $0^0\ 5^0\ 10^0\ 15^0 \ldots$ an und erhält dann Punkte $N_0\ N_5\ N_{10}\ N_{15} \ldots$, durch welche der $0^{\text{te}}\ 5^{\text{te}}\ 10^{\text{te}}\ 15^{\text{te}} \ldots$ Meridian gezogen werden können. Von diesen Meridianen werden natürlich nur diejenigen konstruiert, die das darzustellende Gebiet durchschneiden.

Es bleibt nun noch übrig, die Parallelkreise zu konstruieren, die hier, wie schon erwähnt, Hyperbeln werden. Zu diesem Zwecke kann man sich darauf beschränken, die Durchschnittspunkte der Parallelkreise mit den Meridianen zu bestimmen und diese mittels einer stetigen Kurve zu verbinden. Man kann je nach Bedürfnis die Anzahl der einzuzeichnenden Meridiane vermehren und dadurch eine vermehrte Anzahl näher bei einander liegender Punkte der Hyperbeln erhalten. Wenn man den Durchschnittspunkt eines beliebigen Parallelkreises von der geographischen Breite β mit dem Meridian von der Länge λ konstruieren kann, ist die Aufgabe gelöst, weil man auf dieselbe Art alle gewünschten Durchschnittspunkte konstruieren kann.

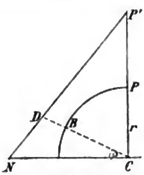


Fig. 30.

Um den Durchschnittspunkt des λ^{ten} Meridians mit dem β^{ten} Parallelkreise zu finden, entwerfe man eine Hilfszeichnung in der Ebene des λ^{ten} Meridians Fig. 30. Aus der vorhergehenden Fig. 29 kennt man die Entfernung

$$CN = \frac{A'C}{\cos(\mu - \lambda)} = \frac{r}{\cos \alpha \cos(\mu - \lambda)},$$

in welcher die Durchschnittslinie dieser Meridianebene mit der Kartenebene den in ersterer gezogenen Äqutorialradius schneidet; aufserdem kennt man den Abstand PP' des Polbildes vom Pol, folglich ist NP' die Durchschnittslinie des λ^{ten} Meridians mit der Kartenebene, bez. das Bild dieses Meridians in der Kartenebene. Trägt man nun an den Äquatorialradius CN den Breitenwinkel β an, so geht durch

B der β^{te} Parallelkreis und D ist die Zentralprojektion dieses Punktes auf $P'N$, d. h. auf den Kartenmeridian. Um diesen Punkt in die definitive Karte zu übertragen, nimmt man DN in den Zirkel und trägt es von N (Fig. 28) aus auf. Die Länge DN läfst sich auch leicht trigonometrisch aus dem Dreieck CDN (Fig. 30) ausdrücken, worin:

$$DN : CN = \sin\beta : \sin CDN.$$

Da $\sphericalangle CDN = 180^0 - \beta - N$, so ist sein Sinus gleich dem von $\beta + N$, d. h. mit Benutzung des oben gefundenen Wertes von CN:

$$DN = \frac{CN \sin\beta}{\sin(\beta + N)} = \frac{r \sin\beta}{\cos\alpha \cos(\mu - \lambda) \sin(\beta + N)}.$$

Den zur Berechnung nötigen Winkel N erhält man aus dem Dreieck CNP', worin:

$$\operatorname{tg} N = \frac{CP'}{CN} = \frac{r}{\sin\alpha} : \frac{r}{\cos\alpha \cos(\mu - \lambda)} = \operatorname{ctg}\alpha \cos(\mu - \lambda).$$

Man kann sonach jeden beliebigen Durchschnittspunkt entweder rein geometrisch konstruieren, oder, was für genaue Entwürfe ganz entschieden vorzuziehen ist, die Längen der einzelnen Abschnitte trigonometrisch berechnen und in die Karte eintragen. — Bei der rein geometrischen Konstruktion braucht man die verschiedenen Hilfsfiguren nicht auf besonderen Blättern zu zeichnen, sondern kann alles in einem Komplex vereinigen, wie die beistehende Konstruktion (Fig. 31) erläutert, worin alle Hilfslinien punktiert sind. Die folgende, dazu gehörige Anweisung mufs nach dem Vorherigen vollkommen verständlich sein: Man ziehe durch die Mitte des Papierblatts eine Gerade FG, welche den Mittelmeridian der Karte darstellen soll. (Gehört dieser nicht zu denjenigen Meridianen, die im Netz ausgezogen werden sollen, so wird er nach Vollendung der Konstruktion wieder weggewischt.)

In dem Mittelpunkt M errichtet man nun die Senkrechte $MC = r$. Die Gröfse r ist gleich dem Erdradius im Mafsstabe der Karte. Soll z. B. letzterer ein Zwanzigmilliontel sein, so wird in Metern ausgedrückt:

$$r = \frac{6\,370\,000}{20\,000\,000} = 0{,}3185^{m}.$$

An das Ende C von r wird die geographische Breite α der Kartenmitte angetragen und dadurch der Punkt A' des Äquatorbildes, sowie, indem CP' senkrecht zu CA' gemacht wird, das Polbild P' gefunden. Dann kann der Äquator $Q'Q'$ senkrecht zu FG gezogen werden.

Bis hierher wurde die Hilfsfigur Fig. 27, nur in verdrehter Lage, mit Fig. 28 kombiniert. Nun tritt die Fig. 29 hinzu. Zu diesem Zwecke macht man $A'C' = r$ und trägt nun an $C'A'$ die Winkel

$(\mu - \lambda)$ zwischen dem Mittelmeridian und den einzutragenden Meridianen auf. Man kann entweder, wie in jener Figur, erst den Nullmeridian finden und dann von dort aus die aufzunehmenden Längenwinkel antragen, oder man berechnet den Winkel $(\mu - \lambda)$ für die zu beiden Seiten der Mitte folgenden Meridiane, soweit sie das darzustellende Gebiet schneiden. Ist z. B. eine Karte des nördlichen Atlantischen Ozeans zwischen 0° und 85° westlicher Länge und 10° bis 65° nördlicher Breite zu entwerfen, so ist $37\frac{1}{2}$° nördlicher Breite der

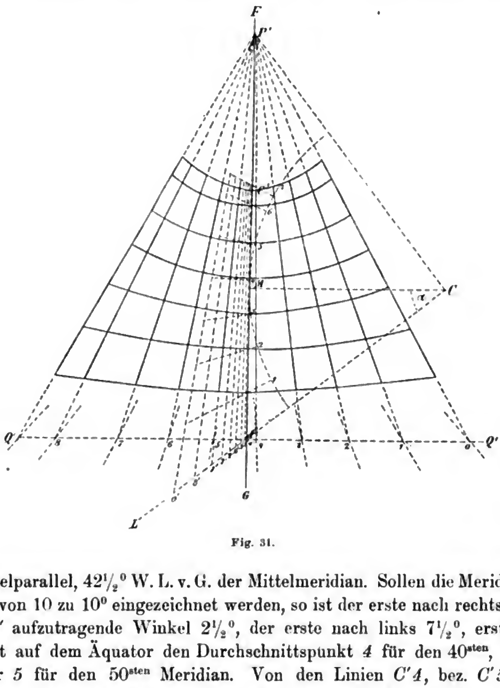


Fig. 31.

Mittelparallel, $42\frac{1}{2}$° W. L. v. G. der Mittelmeridian. Sollen die Meridiane nur von 10 zu 10° eingezeichnet werden, so ist der erste nach rechts von $C'A'$ aufzutragende Winkel $2\frac{1}{2}$°, der erste nach links $7\frac{1}{2}$°, ersterer giebt auf dem Äquator den Durchschnittspunkt *4* für den 40^sten^, letzterer *5* für den 50^sten^ Meridian. Von den Linien $C'4$, bez. $C'5$ an hat man dann weiterhin nur noch Winkel von 10°, 20°, 30°, 40° ... anzutragen. Man erhält so die weiteren Durchschnittspunkte *0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9* des 0^ten^, 10^ten^, 20^sten^, ... 90^sten^ Meridians mit dem Äquator und kann also alle Meridiane $P'1$, $P'2$, $P'3$ ... ausziehen. Die Ab-

schnitte der Meridiane durch die Parallelkreise lassen sich noch an derselben Figur konstruieren, wie dies in Fig. 31 geschehen ist, indem man von dem Mittelpunkt C aus auf der Linie $CA'L$ die sämtlichen Längen $C'1$, $C'2$ . . . u. s. w. aufträgt, die erhaltenen Punkte $0'$, $1'$, $2'$, $3'$ . . . mit P' verbindet und diese Verbindungslinien durch ein von C ausgehendes Strahlensystem mit den Winkeln $\beta = 10^0$, 20^0, 30^0, 40^0 . . . schneidet, wodurch man die Abschnitte ND (von Fig. 30) erhält, die man dann auf dem wirklichen Meridian von dem betreffenden N aus aufträgt. Für den Anfänger ist es aber zweckmäfsig, diesen Teil der Konstruktion abgesondert auszuführen, um die eigent-

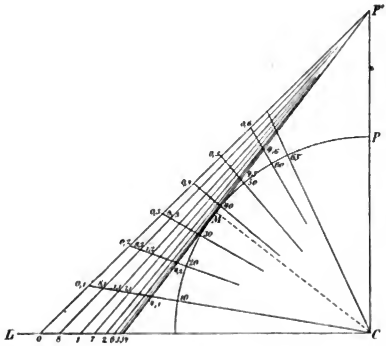


Fig. 32.

liche Kartenzeichnung nicht zu überladen. Es sind dann in Fig. 30 sämtliche Längen CN einzutragen und sämtliche Punkte N mit P' zu verbinden. An CL werden dann die Winkel 10^0, 20^0, 30 . . . angetragen; nach Bedürfnis auch die südlichen Breiten. Die entstehende Zeichnung (Fig. 32) giebt dann alle Meridianabschnitte DN. Für das vorhin begrenzte Gebiet erhält man vorstehendes Bild, worin statt der Buchstaben N die betreffenden Nummern des Meridians (*1* ist der 10te, *2* der 20ste, *3* der 30ste u. s. w.) stehn. Die Durchschnitte mit den Parallelkreisen sind durch eine zweite Zahl ausgedrückt, so dafs z. B. *2,3* den Durchschnittspunkt des 20sten Meridians mit dem 30sten Parallelkreise bedeutet.

Die hier erhaltenen Punkte werden nun in die Zeichnung Fig. 31 übertragen und durch stetige Kurven verbunden, die die Parallelkreishyperbeln darstellen. Bestimmt man die Meridianabschnitte DN

(Fig. 30) durch Rechnung, so stellt man zuletzt die Werte in einer Tabelle zusammen, die als Überschrift der Kolumnen die geographischen Längen, also im vorliegenden Falle 90°, 80°, 70° . . . 10°, 0° und als Eingang von der Linken die Breiten, also 70°, 60° . . . 20°, 10° enthält.

Die gnomonische Meridianprojektion, welche eintritt, wenn die Kartenmitte M im Äquator liegt, bildet eine erhebliche Vereinfachung des behandelten allgemeinen Falles. Da die Kartenebene der Erdachse parallel ist, so fällt der Schnittpunkt P', das Polbild, in unendliche Entfernung, die Meridiane werden also parallele Geraden, die den Äquator senkrecht schneiden. Die Punkte N werden, nachdem Mittelmeridian und Äquator durch die Mitte des Blatts gezogen sind, ebenso wie im allgemeinen Fall mittels des Punktes C', der nun in den Äquator fällt, gefunden und die Meridiane dann durch die so gefundenen Punkte N senkrecht zum Äquator gezogen. Die Konstruktion der Parallelkreisdurchschnitte nach Fig. 32 ändert sich nur insofern, als alle Linien von den Punkten *1, 2, 3 . . . 9* nach dem unendlich fernen P' nun als Senkrechten auf CL zu errichten sind, folglich mit

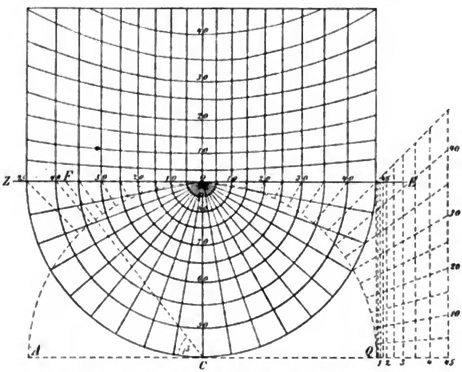


Fig. 33. Gnomonische Meridian- bez. Polar-Projektion.

dem Mittelmeridian parallel laufen. Setzt man in den allgemeinen Formeln S. 39 u. 40 $\alpha = 0$, so erhält man:

$$A'N = r \operatorname{tg}(\mu - \lambda), \qquad CN = \frac{r}{\cos(\mu - \lambda)},$$

$$\sphericalangle N = 90^\circ, \qquad DN = \frac{r \operatorname{tg} \beta}{\cos(\mu - \lambda)}.$$

Vorstehende Fig. 33 giebt in ihrem oberen Teile die Nordhälfte der gnomonischen Äquatorial- (oder Meridian-)Projektion eines Kugeloberflächenstücks von 90° Längenausdehnung zwischen den Parallelen von 45° südlicher und nördlicher Breite.

Weit einfacher ist die Ausführung der gnomonischen Polarprojektion. Die Meridiane können nach dem S. 36 gesagten ohne weiteres gezogen werden. Um den Radius der Parallelkreise zu finden, entwerfe man eine Hilfsfigur (Fig. 33 unterer Teil) in einer Meridianebene. Teilt man die Bogen AP und PQ in je 9 gleiche Teile, so sind die Teilungspunkte *1, 2, 3 . . . 8* die Durchschnittspunkte des 10ten, 20sten, 30sten . . . 80sten Parallelkreises mit der Papierebene. Durch Strahlen von C aus werden diese Punkte auf die Kartenebene ZE projiziert. Parallelkreisradien werden also die Längen $0\text{-}10 = P80$, $0\text{-}20 = P70$, $0\text{-}30 = P60$ . . . Der unter der Linie ZE gelegene Teil der Fig. 33 ist also die Hälfte der zentralen Polarprojektion des Kugelnetzes nördlich vom 45sten Breitengrad. Die Figur lehrt, dafs der Radius PF irgend eines Parallelkreises von der Breite β den Wert hat:

$$PF = CP \operatorname{tg} (90^0 - \beta) = r \operatorname{ctg} \beta.$$

Die Zentralprojektion hat zwei grofse Mängel. Erstens werden die in der Richtung zur Kartenmitte gemessenen Distanzen mit zunehmendem Abstand von dieser Mitte immer ausgedehnter, woraus folgt, dafs für die Messung solcher Distanzen in der Mitte und am Rand der Karte ein verschiedener Mafsstab gebraucht werden mufs. Wenn M (Fig. 34) die Kartenmitte und MB ein Bogen der abzubildenden Kugelfläche vom Radius $CM = r$ ist, so wird ein kleiner von M ausgehender Kugelbogen s (man kann sich darunter immer einen Bogen von 1 Sekunde denken), durch eine gerade Strecke s' abgebildet, deren Länge von s nicht merklich verschieden ist. Ist also r der n^{te} Teil des Erdradius, so ist auch s' der n^{te} Teil des entsprechenden Bogens auf der Erde; mit anderen Worten die Längen in der Kartenmitte sind in demselben Mafsstab verkleinert, wie der Erdradius. Betrachtet man nun aber einen Punkt B, dessen Lotlinie mit der in M errichteten den Winkel φ bildet, und zieht hier einen in der Verlängerung des Bogens MB liegenden kleinen Bogen s, so ist die Abbildung des Punktes B auf der Karte der Punkt D und die des Bogens s die Strecke $DG = s''$. Zieht man $DF = s'''$ senkrecht zu CD, so verhält sich:

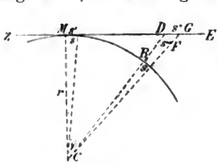


Fig. 34.

$$s''' : s = CD : CB = \frac{r}{\cos \varphi} : r.$$

Ferner ist der Winkel zwischen s'' und s''' gleich φ, weil die rechtwinkligen Dreiecke CMG und DFG den Winkel G gemeinsam haben, folglich ähnlich sind. Es ist also

$$s''' = s'' \cos \varphi.$$

Setzt man diesen Wert in die vorige Proportion, so wird diese:

$$s'' \cos \varphi : s = \frac{1}{\cos \varphi} : 1$$

oder:

$$s'' = \frac{s}{\cos^2 \varphi},$$

d. h. die Bogenlänge s erscheint auf der Karte im Verhältnis von $1 : \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ vergröfsert. Ist z. B. $\varphi = 45^0$, also $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so wird die Vergröfserung $= 1 : 2$ d. h. s'' wird doppelt so grofs wie s auf der Kugel, bez. wie s' in der Kartenmitte. Bei noch gröfserem φ wächst die Vergröfserung bald ins ungeheuere, wovon die Folge ist, dafs man nur kleine Teile der Kugeloberfläche in handlichem Format in Zentralprojektion darstellen kann. Zur Darstellung einer Halbkugel würde eine unendlich grofse Papierfläche nötig sein, weil die Projektionsstrahlen ihres Randes parallel der Zeichnungsebene d. h. für jeden $\varphi = 90^0$ sein würde. — Die Zentralprojektion ist also sicher keine äquivalente Projektion.

Der zweite Mangel besteht darin, dafs an jedem Punkt aufserhalb der Kartenmitte der Mafsstab für Strecken, die die Richtung zur Mitte haben, ein anderer ist, wie für solche, die senkrecht zu dieser Richtung stehn. Denkt man sich in Fig. 34 in B einen Kugelbogen s senkrecht zur Ebene der Figur, so wird dessen Abbildung in der Karte von D aus auch senkrecht auf jener Ebene stehn, und zwar hat diese Strecke die Länge s'''; denn wenn man das Dreieck CDF um die Linie CD als Achse um 90^0 dreht, so fällt die Linie DF in die Zeichnungsebene ZE.

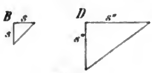


Fig. 35.

Das bei B auf der Kugel gelegene, gleichschenklig rechtwinklige Dreieck B (Fig. 35) wird also in der Karte abgebildet durch ein rechtwinkliges Dreieck D, dessen Katheten nicht mehr gleich sind. Beide sind gröfser als s, sie sind nämlich:

$$s''' = \frac{s}{\cos \varphi}, \qquad s'' = \frac{s}{\cos^2 \varphi}.$$

Für $\varphi = 45^0$ ist also z. B.

$$s''' = s \,.\, \sqrt{2} = 1{,}414 s; \quad s'' = 2 s.$$

Die Vergröfserung ist also, wie voraus angegeben, in den beiden Richtungen eine verschiedene und die Folge davon eine Verschiedenheit der Winkel, d. h. eine Verzerrung des Urbildes. Die Projektion ist also jedenfalls nicht winkeltreu. Die rechten Winkel, unter denen sich Meridiane und Parallelkreise schneiden, werden in der Zentralprojektion im allgemeinen in spitze und stumpfe verzerrt. Wie der zuvor betrachtete Fall zeigt, bleiben sie nur dann rechte Winkel, wenn ihr einer Schenkel die Richtung durch die Kartenmitte hat. Dies ist bei der Polarprojektion für alle diese Winkel der Fall, denn alle Meridiane gehn durch die Mitte; bei der Äquatorialprojektion für die Schnitte der Meridiane mit dem Äquator, und bei jeder beliebigen Horizontalprojektion für die Schnitte des Mittelmeridians mit allen Parallelkreisen.

Diesen Mängeln der vorliegenden Projektion steht ein grofser Vorzug gegenüber, der die Anwendung derselben, namentlich für die Seekarten, in neuerer Zeit ausdehnt. Es ist die Eigenschaft, dafs jeder gröfste Kugelkreis als gerade Linie abgebildet wird. Der gröfste Kreis ist aber die kürzeste Linie zwischen 2 Punkten der Kugel, also derjenige Weg, welchen ein Schiff über das Meer (abgesehen von den durch Wind und Strömungen bedingten Abweichungen) von einem Hafen zum anderen immer aufsuchen wird. Hat der Seefahrer eine Karte des betreffenden Ozeans in gnomonischer Projektion, so kann er durch Anlegen des Lineals an Ausgangs- und Ankunftshafen seinen Weg im voraus in die Karte einzeichnen und daraus entnehmen, unter welcher geographischen Breite jeder Längengrad geschnitten werden mufs, welchen Kurs er also von Grad zu Grad steuern mufs.

2. Orthographische oder Parallelprojektion. Projiziert man die Punkte der Kugeloberfläche durch Strahlen, die durch einen unendlich entfernten Punkt gehn, also parallel sind, so erhält man die in der Überschrift genannte Projektion, die praktisch wenig Anwendung findet, trotzdem aber Interesse hat, denn sie stellt die Erdkugel so dar, wie sie einem Beobachter auf einem Stern erscheinen würde. Schon einem Mondbewohner würde sie nahezu in orthographischer Projektion erscheinen, weil die Entfernung des Mondes schon 60 mal so grofs wie der Erdhalbmesser ist. Wenn man einen Globus aus grofser Entfernung betrachtet, so erscheint sein Gradnetz in nahezu orthographischer Projektion.

Um einen Teil der Kugelfläche in Parallelprojektion darzustellen, zieht man durch die Mitte M des darzustellenden Gebiets einen Kugelradius und nimmt den fernen Augpunkt auf dessen Verlängerung an, d. h. man projiziert alle Punkte durch Parallelen zu diesem Radius. Die Kartenebene steht senkrecht zu diesem Radius und werde hier

durch den Kugelmittelpunkt gelegt (wie $Z'E'$ Fig. 22). Der Meridian, in welchem der genannte Radius liegt, ist der als gerade Linie sich projizierende Mittelmeridian, der aufrecht und so gestellt wird, dafs Nord oben, Süd unten liegt.

Alle Kugelkreise stellen sich im allgemeinen als Ellipsen dar.

Man erkennt leicht, dafs eine vollständige Halbkugel in dieser Projektion dargestellt werden kann, diejenige nämlich, welche durch den gröfsten Kreis begrenzt ist, in dem die Zeichenebene die Kugel schneidet, der also der Kugelfläche und der Projektionsebene (Karte) gemeinsam angehört. Für die Darstellung der Halbkugel erhält man also die Begrenzung, indem man mit dem Kugelradius r einen Kreis zieht, dessen Zentrum auf dem schon gezogenen Mittelmeridian liegt. Ist Fig. 36 in der Ebene des Mittelmeridians entworfen, M der Mittelpunkt des darzustellenden Gebiets und NS die Erdachse, AQ der Äquator, so ist α die geographische Breite des Punktes M. Jede Parallelkreisebene steht senkrecht zur Erdachse, folglich senkrecht zur Ebene der Figur und schneidet diese in einer zu NS senkrechten Geraden DF. Der Winkel FCQ ist die geographische Breite β dieses Parallelkreises. Derjenige Durchmesser des Parallelkreises, der in G senkrecht zur Ebene der Figur steht, wird durch 2 zu ihm senkrecht stehende Parallelstrahlen auf die Kartenebene ZE projiziert, bleibt also unverkürzt. Dasselbe gilt von allen Parallelkreisdurchmessern, die senkrecht zum Mittelmeridian stehn. Die halbe grofse Achse der einen Parallelkreis darstellenden Ellipse ist also gleich seinem Radius

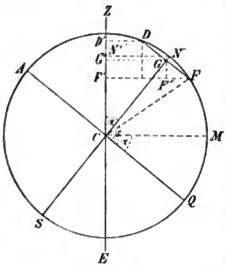


Fig. 36.

$$FG = r \sin FCG = r \cos \beta.$$

Die halbe kleine Achse ist hingegen $= F'G'$, der Projektion von FG auf ZE. Der Winkel, den die Linien FG und CG' miteinander bilden, ist gleich demjenigen, den die zu beiden senkrechten Geraden CN und CM miteinander bilden, also $= MCN = 90^0 - \alpha$; folglich ist:

$$F'G' = F''G = FG \cos FGF'' = FG \cos (90^0 - \alpha)$$
$$= FG \sin \alpha = r \cos \beta \sin \alpha.$$

Die Punkte F', G' und D' lassen sich nach Fig. 36 durch Konstruktion der Senkrechten FF', GG', DD' angeben oder auch berechnen. Die

Lage des Ellipsenzentrums G' auf dem Mittelmeridian ergiebt sich aus der Formel:

$$CG' = CG \cos GCG' = CF \cos FCG \cos \alpha = r \sin \beta \cos \alpha.$$

Die Lage der Scheitelpunkte ergiebt sich aus den Achsenlängen. Es läfst sich sonach jede Ellipse mittels eines Ellipsenzirkels ziehen. Aber man kann auch beliebig viele Punkte der Ellipse konstruieren, falls ein solcher Zirkel nicht zu gebote steht. Die Art dieser Konstruktion wird baldigst an dem einfacheren Fall der orthographischen Äquatorialprojektion erläutert werden. — Die Lage des Polbildes N' erhält man durch Fällen der Senkrechten NN' und es wird

$$CN' = r \cos \alpha.$$

Von den Parallelkreisellipsen erscheinen nur diejenigen ganz auf der Karte, die ganz auf der durch ZE abgeschnittenen Kugelhälfte liegen. Von den übrigen wird durch den Begrenzungskreis das auf der anderen Halbkugel liegende Stück abgetrennt.

Die Meridianebenen schneiden sich sämtlich in der gegen die Kartenebene um α geneigten Erdachse. Jede einzelne derselben schneidet diese Ebene in einer Geraden, die einen Durchmesser des Begrenzungskreises bildet. Nur für den Mittelmeridian steht dieser Durchmesser senkrecht und fällt mit dem Meridianbild selbst zusammen. Für jeden anderen Meridian, der mit dem Mittelmeridian den Winkel $\nu = (\mu - \lambda)$ bildet, steht jener Durchmesser schief. Beistehende Figur 37 soll dies in perspektivischer Zeichnung versinnlichen. $HMNJ$ sei der Mittelmeridian, HJ der Durchmesser, in welchem er die Zeichnungsebene schneidet. KNL sei ein anderer Meridian, der am Nordpol N mit dem vorigen den Winkel ν bildet und die Kartenebene in dem Durchmesser KL des Randkreises schneidet. Bei der Projektion durch Parallelstrahlen, die senkrecht auf der Kartenebene stehn, behält der Halbmesser $CK = CL = r$ seine Gröfse unverkürzt; der darauf senkrechte CG wird am meisten verkürzt.

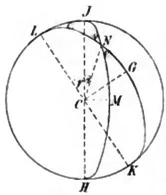


Fig. 37.

Das Bild des Meridians wird also eine Ellipse, deren halbe grofse Achse die Länge r hat und den Winkel LCJ mit dem Mittelmeridian bildet; deren kleine Achse aber gleich CG $(= r)$ mal dem Cosinus des Neigungswinkels der Ebene KGL gegen die Kartenebene ist. Um Achsen und Lage der Bildellipse dieses Meridians zu finden, sind also der Winkel $LCJ = \gamma$ und der Neigungswinkel beider Ebenen, also der Winkel $JLN = \varepsilon$ zu bestimmen. Beide Winkel sind in dem sphärischen Dreieck JLN enthalten, in welchem der

Winkel bei $N = \nu$ ist, der Winkel α durch den Bogen JN, der Winkel γ durch LJ gemessen wird. Der Winkel bei J ist ein rechter. Folglich geben die Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck:

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin \alpha \operatorname{tg} \mu$$
$$\cos \varepsilon = \cos \alpha \sin \nu.$$

Die erste Formel giebt für jeden Meridian von gegebener Länge λ, also von bekanntem $\nu = \mu - \lambda$, den Winkel γ, der die Stellung der grofsen Achse seiner Bildellipse bestimmt, während seine kleine Halbachse bestimmt ist durch

$$r \cos \varepsilon = r \cos \alpha \cos \nu.$$

Für die verschiedenen einzuzeichnenden Meridiane wird man sich eine Tabelle der γ und der $r \cos \varepsilon$ berechnen. Ebenso wird man für die Parallelkreise eine Tabelle der Mittelpunktsabstände CG', der grofsen Achsen $r \cos \beta$ und der kleinen Achsen $r \cos \beta \sin \alpha$ berechnen. Man kann dann alle Ellipsen mittels des Ellipsenzirkels oder nach bestimmten Konstruktionsvorschriften ziehen.

Die rein geometrische Konstruktion der einzelnen Schnittpunkte von Meridianen und Parallelkreisen ist im allgemeinen Falle äufserst mühsam und wird praktisch wohl nur selten ausgeführt werden. Nur in dem speziellen Falle der Meridianprojektion ist sie leichter und soll deshalb hier entwickelt werden. Liegt der Mittelpunkt der darzustellenden Halbkugel im Äquator, so liegt der nach ihm gezogene Radius in der Äquatorialebene, und alle Projektionsstrahlen sind somit dieser und damit auch allen Parallelkreisebenen parallel, oder wie man auch sagen kann, alle Parallelkreise gehen durch den unendlich entfernten Augpunkt. Sie projizieren sich also als parallele gerade Linien, die den Mittelmeridian senkrecht schneiden. Beide Pole N und S liegen in dem Begrenzungskreis, welcher der zum Mittelmeridian senkrechte Meridian ist. Dieser Kreis gehört der Karte und der Kugel gemeinsam an, ist also sein eigenes Bild. Da er wie jeder Meridian von den Parallelkreisen in gleiche Bogen eingeteilt wird, so lassen sich die geradlinigen Parallelkreisbilder sofort ausziehen. Man teilt den Randkreis, falls das Netz von 10 zu 10° gezogen werden soll, in 36 gleiche Teile und verbindet die gleichnamigen Teilpunkte (Fig. 38).

Die Meridiane gehen durch die Erdachse NMS, haben also sämtlich diesen unverkürzt bleibenden Durchmesser als grofse Achse, die Länge der kleinen hängt von dem Winkel gegen den Randmeridian ab. Man denke sich auf jeder Meridianebene die Durchschnittslinien mit den Parallelkreisen so ausgezogen, wie in Fig. 38. Diese Parallelkreisradien $s_1, s_2, s_3 \ldots s_8$ haben die Werte:

$$s_1 = r \cos 10^0, \quad s_2 = r \cos 20^0 \ldots s_8 = r \cos 80^0.$$

Hat nun ein Meridian die Neigung φ gegen die Ebene der Karte, so erhält durch Strahlen, die senkrecht zu dieser Ebene stehn, jede Linie $s = CB$ (Fig. 39) eine Projektion CB', die kleiner als s und zwar $= s \cos \varphi$ ist. (Die Ebene der Fig. 39 soll senkrecht stehn auf NS, also die eines Parallelkreises sein.) Für einen Meridian, der den

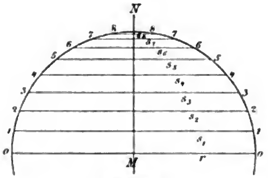


Fig. 38.

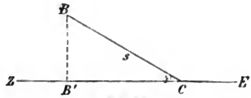


Fig. 39.

Winkel φ mit dem Begrenzungsmeridian bildet, haben die Projektionen der Durchschnittspunkte der Parallelkreise also die Abstände:

$$r \cos \varphi, \quad s_1 \cos \varphi, \quad s_2 \cos \varphi, \quad s_3 \cos \varphi \ldots s_8 \cos \varphi$$

von der den Mittelmeridian darstellenden Geraden. Will man also die Meridiane von 10 zu 10^0 vermöge ihrer Durchschnittspunkte mit den Parallelen eintragen, so hat man φ die Werte 10^0, $20^0 \ldots 80^0$ zu erteilen; d. h. man hätte, um diese Längen zu konstruieren, die Fig. 39 für diese 8 verschiedenen Werte von φ zu zeichnen. Die Werte von s, von s_8, s_7 bis s_1 und r könnte man dann jedesmal sämtlich auf der Linie CB von C aus auftragen und von dem Endpunkt einer jeden Strecke eine Senkrechte wie BB' fällen; allein diese Konstruktion kann man wesentlich durch die Überlegung vereinfachen, dafs die einzelnen Werte

$$s \cos 10^0, \quad s \cos 20^0 \ldots s \cos 80^0,$$

aus s ebenso entstehn, wie die s aus r entstanden sind. Es sind also die Meridianabschnitte auf dem Parallel:

80^0 :	$r \cos 80^0 \cos 80^0$,	$r \cos 80^0 \cos 70^0$,	$r \cos 80^0 \cos 60^0 \ldots$	$r \cos 80^0 \cos 10^0$;
70^0 :	$r \cos 70^0 \cos 80^0$,	$r \cos 70^0 \cos 70^0$,	$r \cos 70^0 \cos 60^0 \ldots$	$r \cos 70^0 \cos 10^0$;
60^0 :	$r \cos 60^0 \cos 80^0$,	$r \cos 60^0 \cos 70^0$,	$\ldots$	$r \cos 60^0 \cos 10^0$;
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
10^0 :	$r \cos 10^0 \cos 80^0$,	$r \cos 10^0 \cos 70^0$,	$\ldots$	$r \cos 10^0 \cos 10^0$;
0^0 :	$r \quad \cos 80^0$,	$r \quad \cos 70^0$	$\ldots$	$r \quad \cos 10^0$.

Allgemein gesprochen liegt das Bild des Durchschnitts des β^{ten} Parallels mit dem Meridian, der den Winkel ν mit dem Mittelmeridian bildet, im Abstand $r \cos \beta \sin \nu$ vom Bilde des letztern.

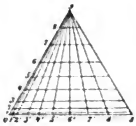


Fig. 40.

Geometrisch lassen sich diese Werte sehr einfach konstruieren. Bildet man ein gleichseitiges Dreieck von der Seite r (Fig. 40) und trägt auf eine Seite von der Spitze aus die Längen $s_8, s_7 \ldots s_1$ aus Fig. 38 auf, so haben die Parallelen zur Grundlinie, die durch die Endpunkte *1, 2 … 8* gezogen werden, gleichfalls die Längen

$$s_1, s_2, s_3 \ldots s_8.$$

Trägt man nun auf die Grundlinie gleichfalls von rechts her die Längen $s_8, s_7 \ldots s_1$ auf, so werden durch Strahlen, die von der Spitze nach den Endpunkten *1', 2', 3' … 8'* zu ziehen sind, alle einzelnen Parallelen d. h. alle s so geschnitten, dafs die Stücke sich so verhalten, wie die Abteilungen der Grundlinie, d. h. wie $s_1 : s_2 : s_3 \ldots s_8$ und somit wie

$$\cos 10^0 : \cos 20^0 : \ldots : \cos 80^0.$$

Um also z. B. für den 50sten Parallelkreis die Schnittpunkte der Meridiane zu finden, entnimmt man die Abschnitte der fünften Parallele vorstehender Figur — ihren Anfangspunkt haben alle Abschnitte in der rechten Dreiecksseite — und trägt sie in Fig. 38 auf den Linien *5,5* vom Mittelmeridian aus nach rechts und links auf. Ist dasselbe für alle Parallelkreise geschehen, so kann man die demselben Meridian angehörigen Punkte aus freier Hand oder mittels des Kurvenlineals verbinden und erhält dann das Bild, wovon in Fig. 41 die obere Hälfte gegeben ist.

Die orthographische Polarprojektion entsteht, wenn die Projektionsstrahlen parallel der Erdachse laufen und die Kartenebene zu dieser senkrecht steht. Jeder Parallelkreis ist alsdann dieser parallel und projiziert sich in seiner wahren Gestalt und Gröfse. Der Äquator bildet den Begrenzungskreis. Die Parallelkreisradien sind die schon bekannten

$$s_1 = r \cos 10^0,$$
$$s_2 = r \cos 20^0 \ldots s_8 = r \cos 80^0,$$

also ohne weiteres aus Fig. 38 zu entnehmen. Das Netzbild ist in der unteren Hälfte von Fig. 41 gegeben.

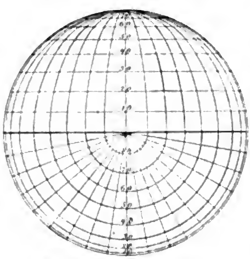


Fig 41. Parallelperspektive.

Der grofse Nachteil der Parallelprojektion besteht in der ins Auge springenden, zunehmenden Verkürzung der Randzonen. Die Zonenbreite nimmt im Bild von der Mitte nach dem Rand fortwäh-

rend ab. Während z. B. in der Projektion die den Pol umgebende Zone von 1″ Breite in ihrer wahren Gröfse abgebildet wird, ist die Breite einer solchen Zone, die an den Äquator grenzt, im Bilde = 0, weil sie senkrecht zur Bildebene steht. Die Projektion ist also nicht flächentreu. Sie ist aber auch nicht winkeltreu, denn wie schon Fig. 41 lehrt, bleiben die Winkel zwischen Meridianen und Parallelen im Bilde keine rechten. Die Parallelprojektion wird deshalb eigentlich nur für Mondkarten angewandt, denn sie bildet den Mond so ab, wie wir ihn wirklich sehen.

3. Stereographische Projektion. Liegt bei perspektivischem Entwurf der Augpunkt in der Kugeloberfläche, so entsteht auf einer zum zugehörigen Radius senkrecht stehenden Ebene die stereographische Projektion desjenigen Teils der Kugel, dessen Mitte der dem Augpunkt O diametral gegenüberliegende Punkt M ist. Die obere Hälfte der Fig. 42 ist demnach in einer zur Zeichnungsebene ZE, die man durch das Kugelzentrum legt, senkrechten Ebene entworfen. Ein Punkt D der Kugel wird durch den Strahl DO nach L projiziert.

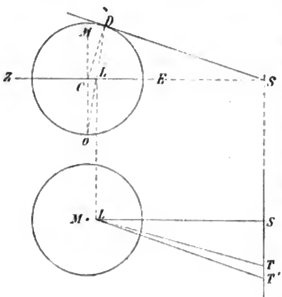


Fig. 42.

Die stereographische Projektion ist, wie zunächst bewiesen werden soll, eine konforme oder winkeltreue. Es ist leicht zu zeigen, dafs zwei beliebige auf der Kugeloberfläche von einem Punkt D ausgehenden Richtungen im Bilde bei L denselben Winkel gegeneinander machen, wie auf der Kugel. Die beiden Richtungen liegen in einer die Kugel in D berührenden Ebene, welche die Zeichnungsebene in einer durch S gehenden Geraden schneidet. Da Tangentialebene und Kartenebene senkrecht zur Ebene der Figur stehn, so steht auch ihre Schnittlinie in S senkrecht zu dieser. Die untere Hälfte der Figur 42 sei ein Grundrifs in der Kartenebene ZE selbst. STT' ist die genannte Schnittlinie, S derselbe Punkt wie oben; M deckt hier C. T und T' seien die Punkte, wo die in D gezogenen zwei Richtungslinien die Schnittlinie von Tangential- nnd Kartenebene treffen; LT und LT' sind dann die Projektionsbilder der Kugeltangenten DT und DT'. Es soll bewiesen werden, dafs der Winkel TLT' der Projektion gleich ist dem Winkel TDT'. Aus der oberen Figur erhellt, dafs im gleichschenkligen Dreiecke CDO die Winkel bei D und O gleich

sind. Der erstere ergänzt aber LDS auf 90°, der letztere CLO und somit auch DLS auf 90°, die Winkel DLS und LDS sind also gleich und das Dreieck DLS ein gleichschenkliges, d. h. $DS = LS$. Folglich entsteht die Projektionsfigur $LSTT'$ aus der ursprünglichen $DSTT'$ einfach dadurch, dafs man diese um ST' als Achse niederklappt in die Ebene ZE. Hierbei bleibt aber der Winkel TDT' ungeändert, d. h. $TLT' = TDT'$. Derselbe Beweis pafst auf jeden Winkel beliebiger von irgend einem Punkt der Kugel ausgehenden Richtungslinien. Man wird nur für jeden Punkt die obere Figur in der durch ihn und den Zentralstrahl MO bestimmten Ebene entwerfen.

Entsprechende Winkel in Urbild und Abbild sind also gleich, die stereographische Projektion also winkeltreu.

Hieraus folgt eine zweite Eigenschaft: Jeder Kreis auf der Kugeloberfläche bildet sich als Kreis ab. Ist ein auf der Kugelfläche liegender Kreis gegeben, so ist es leicht einen Kegel zu konstruieren, der die Kugel in diesem Kreise berührt. Die Spitze dieses Kegels liegt auf dem durch den Mittelpunkt des Kreises gezogenen und verlängerten Kugelradius, und jede Mantellinie desselben berührt die Kugel in einem Punkte des Kreises und wird von diesem senkrecht geschnitten. Bildet man die Spitze und die einzelnen Mantellinien des Kegels mit ab, so besteht das Bild aus lauter von einem Punkt (dem Bild der Kegelspitze) ausgehenden Geraden, welche von der den Kreis abbildenden Kurve sämtlich rechtwinklig geschnitten werden, denn die Winkel von Richtungen, die in der Kugeloberfläche (bez. deren Tangentialebene) liegen, bleiben ja im Bilde unverändert. Es giebt aber nur eine Kurve, welche die Eigenschaft hat, alle von einem Punkt ausgehende Linien senkrecht zu schneiden, und diese ist der Kreis.

Jeder Kugelkreis bildet sich also stereographisch als Kreis ab.

Dieser Satz erleichtert die Konstruktion des Netzes aufserordentlich. Wenn von irgend einem Meridian oder Parallelkreisbild 3 Punkte gefunden werden können, so kann man es mit dem Zirkel völlig konstruieren, denn durch 3 Punkte ist ein Kreis bestimmt.

Es ist zweckmäfsig, hier mit den speziellen Fällen der Konstruktion zu beginnen. In der stereographischen Polarprojektion ist M (Fig. 42) der Pol, $\sphericalangle DCE = \beta$ die geographische Breite des Ortes D. Will man die Halbkugel darstellen, so ist der Äquator die Grenze. Er gehört der Kugel und der Zeichnungsebene gemeinsam an, ist also sein eigenes Bild und kann mit dem Radius r sofort gezeichnet werden. Teilt man ihn in 36 Teile, so lassen sich die Teilpunkte sofort als

Hilfspunkte zur Konstruktion der Parallelkreisradien von 10 zu 10⁰ benutzen; denn zieht man vom unteren Endpunkte O (Fig. 43) des vertikal stehenden Durchmessers Linien $O1$, $O2$, $O3$ ... $O8$ nach den Teilpunkten, so sind die Längen $M1'$, $M2'$ ... die Parallelkreisradien, wie der Vergleich mit Fig. 42 sofort lehrt.

Man hat also nur die Kreise durch die Punkte $1'$, $2'$, $3'$ ... $8'$ zu legen. Die Meridiane zieht man wie bei allen perspektivischen Polarprojektionen. — Der Zahlenwert des Radius R_β zum Parallelkreis von der Breite β ergiebt sich aus Figur 42. Der Zentriwinkel $DCM = 90 - \beta$ ist doppelt so grofs, wie der zugehörige Peripheriewinkel O, folglich

$$O = 45^0 - \frac{\beta}{2}$$

und der Radius

$$CL = R_\beta = r \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right).$$

Bei der **Meridianprojektion** werden Mittelmeridian und

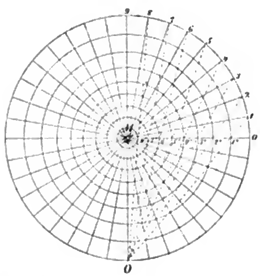


Fig. 43. Stereographische Polarprojektion.

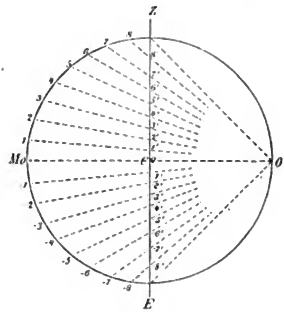


Fig. 44.

Äquator gerade Linien, die sich im Mittelpunkt der Karte senkrecht schneiden. Der Mittelmeridian ZME (Fig. 44) der Kugel wird durch die Parallelkreise in gleiche Bogenstücke geteilt (z. B. von 10 zu 10⁰). Durch Strahlen von O aus erhält man deren Projektionen auf die Mittellinie der Kartenebene ZE. Der Äquator wird aber von den Meridianen in dieselbe Anzahl gleicher Teile geteilt wie der Meridian, und es werde der Einfachheit halber angenommen, dafs der Mittelmeridian einer von den aufzuzeichnenden selbst sei; dann befindet sich das Auge gegenüber dem Äquator in derselben Lage wie in Fig. 44 gegenüber dem Meridian ZME; man erhält also die Ein-

teilung des Äquatorbildes durch die nämlichen Konstruktionslinien. Demnach hat man zum Entwurfe zunächst den Begrenzungsmeridian als Kreis mit dem Radius r zu ziehen, ihn durch einen aufrechtstehenden Durchmesser, den Mittelmeridian, zu teilen, dessen beiden Enden die Pole sind, und erhält dann das Äquatorbild als darauf senkrechten Durchmesser. Darauf teilt man die Peripherie in 36 gleiche Teile. Auf jenen beiden Durchmessern hat man nun die Längen $C1', C2', C3' \ldots C8'$ der Fig. 44 nach oben und unten, sowie nach rechts und links aufzutragen, was direkt mit Hilfe der zuvor gemachten Einteilung ausgeführt wird. Dann kann man die Meridiane sofort konstruieren, denn man hat von jedem 3 Punkte: die beiden Pole und den Durchschnittspunkt durch den Äquator.

Die Mittelpunkte aller dieser Kreise müssen auf dem Äquator oder dessen Verlängerung liegen, denn jeder Meridian mufs den Äquator wie auf der Kugel so im Bilde rechtwinklig schneiden. Um den Mittelpunkt selbst zu finden bedenke man, dafs ein Meridian, der mit dem Mittelmeridian die Längendifferenz ν hat, also mit ihm am Pol den Winkel ν einschliefst, auch im Bild denselben Winkel ν am Pol mit ihm machen mufs; d. h. das gesuchte Meridianbild berührt eine Linie NT (Fig. 45), die unter dem Winkel ν gegen den Mittelmeridian NS gezogen ist. Man hat also nur eine Linie NL senkrecht zu NT, oder unter dem Winkel $90-\nu$ gegen NS zu ziehen, um den Mittelpunkt L und den Radius $LN = R$ des Meridianbildes zu erhalten. Um die Meridiane von 10 zu 10^0 zu finden, legt man bei N einen Transporteur an und trägt beiderseits von NS Winkel von $10^0, 20^0 \ldots 80^0$ an, und zieht die betreffenden Linien NL, dann erhält man die Mittelpunkte $L_1, L_2 \ldots L_8$ der verschiedenen Meridiankreise. — Da der Winkel bei L auch $= \nu$ ist, so hat man

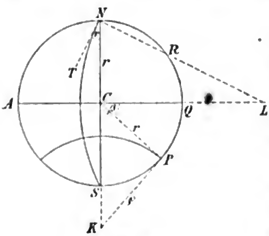


Fig. 45.

$$R = \frac{r}{\sin\nu}, \qquad CL = r \operatorname{ctg} \nu.$$

Zur Konstruktion eines Parallelkreises von der Breite β hat man gleichfalls 3 Punkte, nämlich die 2 Durchschnittspunkte mit dem Randmeridian und denjenigen mit dem Mittelmeridian. Da NS senkrecht vom Parallel geschnitten werden mufs, so liegt der Mittelpunkt auf der Linie NS oder ihrer Verlängerung. Da auch der Randmeridian von dem Parallelkreisbild senkrecht getroffen werden mufs, so

ist der durch P gezogene Kugelradius Tangente an den Parallelkreisbogen; dessen Mittelpunkt liegt also auf der im Punkte P zu CP errichteten Senkrechten PK, folglich in K. So hat man K geometrisch gefunden. Da der Winkel bei K gleichfalls $= \beta$ ist (denn seine Schenkel stehen senkrecht auf denen von $\sphericalangle PCQ = \beta$), so wird der Radius dieses Parallelkreisbildes

$$KP = \varrho = r \operatorname{ctg} \beta, \quad \text{ferner} \quad CK = \frac{r}{\sin \beta}.$$

Man kann also die nötigen Gröfsen sehr einfach berechnen. Fig. 46 stellt die stereographische Äquatorialprojektion einer Halbkugel dar.

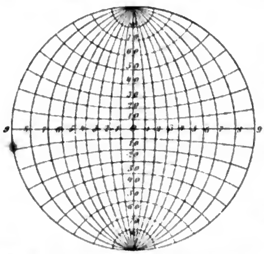


Fig. 46. Sterographische Meridianprojektion.

Auch die stereographische Projektion auf einen beliebigen Horizont ist ohne Schwierigkeit ausführbar. Der Mittelpunkt M der darzustellenden Halbkugel liege in der geographischen Breite α. Figur 47 sei in der Ebene des Mittelmeridians gezeichnet, NS die Erdachse, AQ der Äquator, ZE der Durchschnitt der Kartenebene.

Den Rand der Karte bildet wieder der Schnittkreis von ZE mit der Kugel, also ein Kreis vom Radius r, wozu der Mittelmeridian der aufrechtstehende Durchmesser ist. Zieht man NO, so giebt CN' den Abstand des Pols vom Mittelpunkt der Karte an.

Da als Peripheriewinkel

$$\sphericalangle CON = \varepsilon = \tfrac{1}{2} \overset{\frown}{MCN} = 45^0 - \frac{\alpha}{2},$$

so ist

$$CN' = r \operatorname{tg} \left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Aufser dem Mittelmeridian giebt es aber auch einen Parallelkreis, der sich als gerade Linie projiziert, nämlich der durch O gehende, OP. Bei der in Fig. 47 angenommenen Neigung α gehört freilich nur ein sehr kleiner Teil dieses Parallelkreises der abzubildenden Halbkugel an, trotzdem spielt der Schnitt B dieser Parallelkreisebene mit der Zeichnungsebene eine wichtige Rolle und mufs bei der Konstruktion als Hilfslinie aufgezeichnet werden, auch wenn er ganz aufserhalb des Randkreises fällt, was immer statthat, sobald $\alpha > 45^0$ ist.

Da OP parallel AQ, so ist

$$\sphericalangle BOC = \alpha = NCN'.$$

Ferner ist als Aufsenwinkel

$$CN'O = \varepsilon + \alpha = BON',$$

also

$$BO = BN' = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Figur 48 sei nun der Kartenentwurf selbst; N' der Pol, BL die Durchschnittslinie des Parallelkreises OP. Diese Linie spielt hier die-

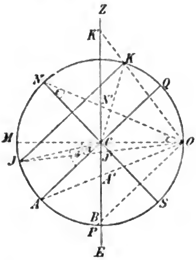


Fig. 47.

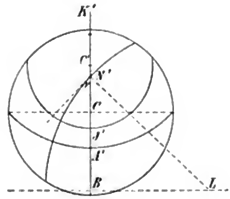


Fig. 48.

selbe Rolle wie der Äquator bei der Äquatorialprojektion. BL mufs von allen Meridianbildern senkrecht geschnitten werden, deshalb müssen deren Mittelpunkte auf ihr liegen. Ein Meridian von der Längendifferenz ν gegen den Mittelmeridian mufs vom Polbild N' unter demselben Winkel ν gegen den Mittelmeridian ausgehn. Man zieht also die Gerade $N'L$ unter dem Winkel $90 - \nu$ gegen $N'B$ und erhält dadurch den Mittelpunkt L und den Radius LN' des betreffenden Meridians. Da $\sphericalangle L = \nu$ ist, so hat man:

$$BL = BN' \operatorname{ctg} \nu = \frac{r \operatorname{ctg} \nu}{\cos\alpha}, \qquad LN' = \frac{BN'}{\sin\nu} = \frac{r}{\cos\alpha \sin\nu}.$$

Die rein geometrische Konstruktion der Meridiane ist, wie man leicht sieht, genau ebenso wie bei der Äquatorialprojektion.

Was nun die Parallelkreise betrifft, so bemerkt man zunächst, dafs in Fig. 47 die Äquatorebene AQ die Kartenebene in einem auf der Ebene jener Figur senkrechten Durchmesser schneidet. Die Schnittpunkte des Äquatorbildes mit dem Rand liegen also auf dem zum Mittelmeridian senkrechten Durchmesser, und den Abstand seines Schnittpunktes mit dem Mittelmeridian selbst findet man durch den Strahl AO also $= CA'$; sonach kann man den Äquator konstruieren. Die Schnittpunkte des Bildes irgend eines Parallelkreises von der Breite β (JK Fig. 47) findet man durch Strahlen OJ und OK in J' und K'. Da das Bild ein Kreis sein mufs, der den Mittelmeridian

senkrecht schneidet, so hat man nur den Abstand zwischen den in den Entwurf Fig. 48 übertragenen Punkten J', K' zu halbieren, um den Mittelpunkt C' und den Radius dieses Kreises zu finden. Bei den der Fig. 47 zu grunde liegenden Annahmen von α und β fällt ein Teil dieses Kreises aufserhalb der darzustellenden Halbkugel. Auch die Zahlenwerte für CJ' und CK' sind nicht schwer zu finden. Es ist:

$$\sphericalangle MOJ = \tfrac{1}{2} MCJ = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$MOK = \tfrac{1}{2} MCK = \frac{180^0 - (\alpha + \beta)}{2} = 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2},$$

woraus

$$CJ' = r \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad CK' = r \operatorname{tg} \left(90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2},$$

also (Fig. 48):

$$C'J' = C'K' = \frac{CJ' + CK}{2} = \frac{r}{2}\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

$$CC' = \frac{CK' - CJ'}{2} = r\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Zur rein geometrischen Ausführung der Projektion braucht man nur den Kreis $EAMNKQO$ (Fig. 47) in die nötigen Teile (z. B. 36 bei Darstellung 10° abständiger Parallelen) einzuteilen und von O aus durch alle Teilpunkte Strahlen (wie OJ und OK) zu ziehen. Dann erhält man auf dem Mittelmeridian die Durchschnittspunkte (wie J' und K'), welche zur Konstruktion gebraucht wërden, wenn sie auch teilweise aufserhalb der darzustellenden Kugelhälfte fallen.

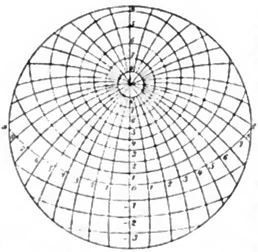


Fig. 49. Stereographische Horizontalprojektion.

Fig. 49 bietet einen völlig ausgeführten Entwurf der stereographischen Projektion für den Horizont von London (bez. Greenwich $51^1/_2{}^0$ N. Br.).

Die leichte Herstellung des stereographischen Bildes durch Kreisbogen, sowie die nirgends gestörte Richtigkeit der Winkelverhältnisse bewirken, dafs diese Projektion namentlich für Planigloben sehr häufig zur Anwendung kommt. Für kleinere Gebiete der Erde ist die rein geometrische Konstruktion derselben wegen der zu grofsen Kreisradien kaum ausführbar, und auch die Formeln bedürfen noch weiterer Ausführung und Ergänzung, um sie in solchen Fällen anwenden zu können.

Der Hauptmangel der Projektion ist die bedeutende Vergröfserung des Mafsstabs von der Mitte zum Rand. In Fig. 50, welche in einer durch das Auge O und den Punkt M gelegten Ebene entworfen ist, sei s ein Kugelbogen von 1″. Ein solcher, von der Mitte M des Gebiets ausgehend, bildet sich auf der Karte von C aus in der Länge $s' = \frac{1}{2} s$ ab; während ein gleichlanger Bogen, vom Gebietsrand bei E ausgehend, in der Länge $s'' = s$ abgebildet wird, denn das kleine Dreieck bei E ist ein gleichschenklig rechtwinkliges, weil s senkrecht zu ZE steht und der Strahl OE einen Winkel von 45° mit ZE bildet. Der Mafsstab ist also am Rande der Karte doppelt so grofs als in der Mitte, und zwar nach jeder Richtung doppelt so grofs, denn bei allen konformen Abbildungen ist ja der Mafsstab für alle von einem Punkt ausgehenden kurzen Linien derselbe. Die Fläche eines Quadrats, dessen Seiten 1″ lang sind und das in der Mitte M des Gebietes liegt, erscheint deshalb in der Karte nur $^1/_4$ so grofs, wie die eines gleichen am Rande gelegenen. Auch die Zehngradfelder des ausgeführten Netzes nehmen deshalb von der Mitte nach dem Rand an Gröfse zu.

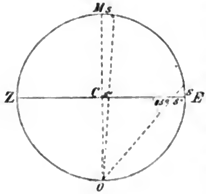


Fig. 50.

Aus der zweiten Haupteigenschaft der stereographischen Abbildung folgt, dafs jeder gröfste Kugelkreis als Kreis abgebildet wird. Der 2 Punkte der Kugel verbindende kürzeste Bogen kann also

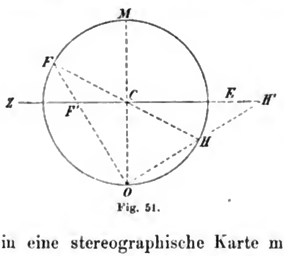


Fig. 51.

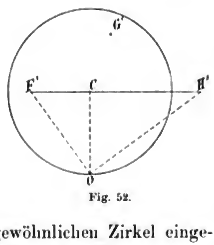


Fig. 52.

in eine stereographische Karte mit dem gewöhnlichen Zirkel eingetragen werden, sobald aufser den beiden Bildpunkten F' und G noch ein dritter auf demselben Kreise liegender angegeben werden kann. Nun liegt aber sowohl der F diametral gegenüberliegende, als der G diametral gegenüberliegende Punkt auf demselben gröfsten Kreise, und von jedem dieser beiden Punkte ist der Bildpunkt unschwer anzugeben. Die Fig. 51 sei in einer durch das Auge, die Kartenmitte

und den Punkt F gelegten Ebene entworfen. Die Projektion des Punktes F fällt nach F'', die des diametral gegenüberliegenden H nach H'. Der Winkel FOH ist ein rechter. Ist also in einem stereographischen Planiglob (Fig. 52) der Punkt F'' und die Kartenmitte C gegeben, so zieht man, indem der Rand als Konstruktionskreis benutzt wird, die Gerade $F''C$ vorläufig unbegrenzt, errichtet darauf senkrecht den Radius CO und dann auf $F''O$ die Senkrechte OH', die den gesuchten Bildpunkt H' ergiebt. Durch F'', den zweiten gegebenen Punkt G' und H' ist nun der Kreis bestimmt und läfst sich nach der bekannten Regel ziehen, indem man die Sehnen $F''G'$ und $G'H'$ halbiert und in ihren Mitten Senkrechte errichtet, deren Schnitt das Kreiszentrum ist. — Statt des Gegenpunktes zu F'' hätte man natürlich mit demselben Erfolg den zu G' gehörigen benutzen können.

4. **Externe Projektionen** geniefsen nicht der geometrischen Einfachheit der bisher betrachteten und bedürfen wegen ihrer seltenen Anwendung keiner ausführlichen Darstellung. Die Konstruktion der Durchschnittspunkte von Meridianen und Parallelkreisen, die sämtlich elliptisch werden, ergiebt sich aus Profilentwürfen wie Fig. 24; sie ist mühsamer, aber grundsätzlich nicht verschieden von den bei den übrigen perspektivischen Projektionen durchgeführten. Hierher gehörige Projektionen sind die von De la Hire, von Parent, von James und von Clarke, die sich nur durch die Wahl des Abstandes des Augpunktes von der Kugeloberfläche unterscheiden und teilweise günstige Deformationsverhältnisse darbieten.

B. Nichtperspektivische Projektionen.

Im Abschnitt der perspektivischen Projektionen ist gezeigt worden, wie man mit dem Prinzip der Azimutalität irgend eine zweite Forderung über die Art der Projektion verbinden kann und dann bestimmte Abbildungen erhält. Dort war die geometrisch so einleuchtende Projektion durch Strahlen von einem Punkt aus das Bestimmende. Systematischer wäre es gewesen, je eine der 3 wichtigen in der Einleitung S. 23 u. 24 besprochenen Forderungen der Äquidistanz, Äquivalenz oder Konformität mit dem Grundprinzip zu verbinden. Dadurch erhält man nämlich 3 ganz bestimmte Abbildungsarten, die eben wegen dieser Eigenschaft wissenschaftlich besonders wichtig sind. Von der einen, der konformen Azimutalprojektion, ist nicht nötig ferner zu sprechen, da dies die eben behandelte stereographische Projektion ist.

1. Die **äquidistante Azimutalprojektion**, von W. Postel herrührend, fordert, dafs ein Kreis im Bogenabstand b vom Berührungspunkt durch einen Kreis von dem Radius $MB' = b$ in der Karte

dargestellt werde (vergl. S. 24). Der Winkel ϑ am Centrum, der zum Bogen b gehört, findet sich aus der Proportion:

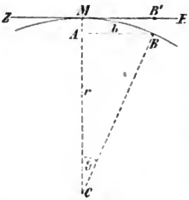


Fig. 53.

$$b : 2r\pi = \vartheta : 360^0,$$

woraus man b bestimmen kann, wenn ϑ bekannt ist. Um nun einen gegebenen Punkt abzubilden, zieht man von der Kartenmitte eine Gerade unter demselben Azimut z, das der Punkt auf der Kugel besitzt, und trägt auf dieser Geraden die Länge b auf. Hierbei ist vorausgesetzt, dafs man das Azimut z und den Winkel ϑ, den sogenannten Zenitabstand des Punktes B vom Berührungspunkt M kennt. Nun sind aber nicht diese Gröfsen unmittelbar gegeben, sondern Länge und Breite der beiden Punkte. Man mufs daher erst z und ϑ durch die Breiten α der Kartenmitte und β des betrachteten Punktes und deren Längendifferenz λ ausdrücken, ehe man das Bild dieses Punktes einzeichnen kann. Untenstehende Fig. 54 sei auf einer Kugeloberfläche vom Radius $= 1$ entworfen. M sei die Kartenmitte, B der betrachtete Punkt, N der Pol, AEQ ein Stück des Äquators. AN und EN sind die durch M und B gelegten Meridiane, deren sphärischer Winkel bei N also $= \lambda$ ist. $\sphericalangle\, BMN$ ist das Azimut des Punktes B von M aus gesehen, also z; AM und BE sind die Bogen der geographischen Breiten α und β. BM ist der zum Winkel ϑ gehörige Bogen b, der Mittabstand. Im sphärischen Dreieck BMN

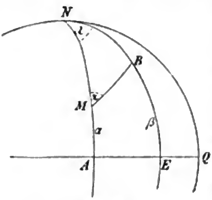


Fig. 54.

sind nun bekannt die beiden Seiten $MN = 90^0 - \alpha$, $BN = 90^0 - \beta$ und der eingeschlossene Winkel λ, man kann also die Seite $BM = \vartheta$ durch den Cosinussatz ausdrücken:

$$\cos\vartheta = \cos(90 - \alpha)\cos(90 - \beta) + \sin(90 - \alpha)\sin(90 - \beta)\cos\lambda$$
$$= \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\lambda$$

und den Winkel z durch den Sinussatz:

$$\sin z = \frac{\sin(90 - \beta)}{\sin\vartheta}\sin\lambda = \frac{\cos\beta\sin\lambda}{\sin\vartheta}.$$



Fig. 55.

Hat man so z und ϑ und aus letzterem noch den zugehörigen Bogen $b = r\vartheta$ berechnet, so kann man den Punkt in die Karte einzeichnen. Deren Konstruktion beginnt mit der Zeichnung des Mittelmeridians, auf welchem die Parallelkreisabschnitte von M (Fig. 55) aus wegen der Äquidistanz

in ihrer wahren Länge aufzutragen sind. Dann trägt man, um das Bild des Punktes B zu finden, das eben berechnete Azimut z an den Meridian an und macht die Länge $MB = b$.

Bei Konstruktion des Gradnetzes versteht man unter B jedesmal den Schnittpunkt eines einzuzeichnenden Meridians mit einem Parallelkreis. Gehört der Mittelmeridian zu den aufzunehmenden und sollen die Netzlinien von 5 zu 5° gezeichnet werden, so setzt man erst $\lambda = 5^0$ und nun $\beta = 0^0, 5^0, 10^0 \ldots 85^0$, dann $\lambda = 10^0$, während β dieselbe Wertreihe durchläuft u. s. w. Man erhält das erste Mal die z und ϑ für die sämtlichen Parallelkreisschnitte auf dem nächsten Meridian, das zweite Mal für die Schnittpunkte des folgenden u. s. w. Wollte man diese Berechnungen durch Tabellen ersetzen, so müfste man für jede Breite α der Kartenmitte eine besondere Tabelle berechnen. Liegt die Kartenmitte in einem Punkte des Äquators, ist also $\alpha = 0$, so vereinfachen sich obige Gleichungen. Die erste giebt

$$\cos\vartheta = \cos\beta\cos\lambda,$$

schreibt man die zweite folgendermafsen:

$$\sin\vartheta = \frac{\cos\beta\sin\lambda}{\sin z},$$

hebt beide aufs Quadrat und addiert sie, so erhält man:

$$1 = \cos^2\beta\left(\cos^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda}{\sin^2 z}\right),$$

woraus sich nach gehöriger Reduktion ergiebt:

$$\operatorname{tg} z = \sin\lambda\operatorname{ctg}\beta.$$

Für diesen Fall, also die Meridianprojektion, hat Lambert*) bereits Tafeln berechnet, welche in Intervallen von 5° die Werte von z und ϑ geben. Man findet dieselben wieder abgedruckt in den neuesten Werken über Projektionslehre**).

Die äquidistante Azimutalabbildung wird meist nur in der Polarprojektion angewandt, weil hier die Parallelkreise konzentrische Kreise werden, deren Abstände gleich den wirklichen Meridianbogen sind (im ideellen Kugelnetz also gleichabständig). Die Meridiane bilden sich wie bei den perspektivischen Projektionen ab.

Wie schon S. 24 gezeigt, werden die senkrecht zur Richtung

*) Lambert, Beiträge zum Gebrauch der Mathematik. Berlin 1772, Bd. 3, S. 177.

**) S. Germain, Traité des projections. S. 378 u. 379. — Gretschel, Lehrb. der Kartenprojektion. S. 236 u. 237. An beiden Stellen findet sich, Lambert nachgedruckt, unter $\lambda = 10^0$ und $\beta = 70^0$ der falsche Wert $z = 4^0\,2'$ statt $3^0\,37'$.

nach der Kartenmitte gemessenen Abstände vergröfsert und zwar um so mehr, je weiter von der Mitte man sie nimmt. Für einen Zenitabstand ϑ hat der durch B (Fig. 53) gelegte Kugelkreis den Radius $AB = r \sin\vartheta$, der entsprechende Bildkreis hat den Radius $b = 2r\pi \cdot \frac{\vartheta}{360^0}$. Der Umfang des letzteren verhält sich also zu dem des ersteren wie

$$2\pi \frac{\vartheta}{360} : \sin\vartheta .$$

In diesem Verhältnisse wird also jede kleine Strecke, die längs diesem Kreise irgendwo gemessen wird, vergröfsert. Ist $\vartheta = 30^0$, so ist $\sin\vartheta = \frac{1}{2}$, das Verhältnis wird also

$$\frac{2\pi}{12} : \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} : 1 = 1{,}047 : 1 .$$

Die Vergröfserung beträgt also nahezu 5 Prozent. Bei Abbildung einer Halbkugel wird der Grenzkreis, für den $\vartheta = 90^0$ ist, im Verhältnis von

$$\tfrac{1}{2}\pi : 1 = 1{,}57$$

vergröfsert.

2. Die **flächentreue Azimutalprojektion** von Lambert ist viel wichtiger als die vorige. Auch hier wird azimutal projiziert, d. h. jeder Punkt der Abbildung liegt mit seinem Original in derselben durch den Berührungspunkt gelegten Vertikalebene, und alle gleichweit von diesem Punkt M entfernten Punkte liegen auch in der Karte auf einem Kreise um M als Mittelpunkt. Es wird nun noch gefordert, dafs jedes Flächenstück der Kugel seiner Bildfläche gleich an Inhalt sei. Dies wird erreicht, wenn man den Radius jedes Bildkreises so wählt, dafs die durch ihn abgebildete Kugelkalotte ihm an Flächeninhalt gleich wird. Betrachtet man nämlich 2 Kalotten, deren Ränder nur sehr wenig (z. B. 1 Bogensekunde) von einander abstehn, und ihre Bildkreise, so ist der Flächeninhalt der zwischen beiden Kalottenrändern enthaltenen Kugelzone auch gleich derjenigen des schmalen Kreisrings, der sie abbildet. Legt man ferner durch M zwei unter einem ganz kleinen Winkel (z. B. 1″) gegeneinander geneigte Vertikalebenen, so schneiden diese aus Zone und Ring je ein kleines Viereck aus, wovon das letztere das Bild des ersteren ist. Auch diese sind an Flächeninhalt einander gleich, denn ist das erstere der n^{te} Teil der ganzen Zone, so ist das letztere der n^{te} Teil der Ringfläche, also sind sie einander gleich. Da man diese Viereckchen beliebig klein machen kann und jede Flächenfigur aus solchen sehr kleinen Flächenstückchen zusammengesetzt betrachten kann, so ist

also Äquivalenz für beliebige, einander entsprechende Flächen vorhanden, die Abbildung also flächentreu.

Um die Fläche des Bildkreises mit dem Radius $MB' = \varrho$ gleich der Kalotte zu machen, deren Rand durch B geht und den Zenitabstand ϑ hat, ist zu setzen

$$\varrho^2\pi = 2r\pi \cdot h\,,$$

wo $h = MD$ die Höhe der Kalotte ist. Daraus folgt, indem sich π weghebt, dafs ϱ mittlere Proportionale zwischen h und $2r$, d. h. zwischen MD und MO sein mufs. Diese mittlere Proportionale ist aber MB, wie der Vergleich der ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke MBO

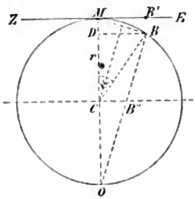


Fig. 56.

und MBD lehrt. Folglich ist $\varrho = MB$ die Sehne des Zonenrandes. Fällt man noch von C eine Senkrechte auf diese Sehne, so sieht man leicht, dafs die halbe Sehnenlänge durch den Sinus des halben Winkels ϑ ausdrückbar ist, so dafs man erhält:

$$\varrho = 2r \sin\frac{\vartheta}{2}\,.$$

Da man für die Netzpunkte die Gröfsen ϑ und z mittels der Formeln von S. 61 u. 62 berechnen kann, so läfst sich auch für jeden solchen Punkt ϱ berechnen und auf der mit dem zugehörigen Azimut z gezogenen Geraden auftragen.

Die äquivalente Azimutalprojektion ist aber auch (und zwar für beliebigen Horizont) rein geometrisch zu konstruieren, wenn man das stereographische Netz für denselben Horizont schon besitzt. Die Fig. 56 zeigt, dafs die von O als Augpunkt aus entworfene stereographische Projektion des Punktes B in B'' sehr leicht die Sehne MB giebt. Man benutzt als Hilfsfigur den Grenzkreis des stereographischen Bildes selbst. Angenommen es solle (Fig. 57) der Durchschnittspunkt B des Meridians L mit dem Parallelkreis P vom stereographischen Bild auf das äquivalente übertragen werden, so zieht man zuerst die Gerade MB, auf welcher der neue Punkt liegen mufs,

darauf nimmt man die Länge MB in den Zirkel und trägt sie auf MQ auf, also $MB' = MB$. Das Lineal hierauf an OB' anlegend schneidet man den Grenzkreis in T. Die Länge ST ist dann $= \varrho$; macht man $MB'' = ST$, so ist B'' der neue Bildpunkt. Die neue Darstellung erhält einen im Verhältnis von $\sqrt{2} : 1$ vergröfserten Durchmesser im

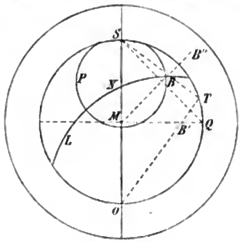


Fig. 57.

Vergleich mit der stereographischen. Denn für einen Punkt des Grenzkreises wird SQ die Sehne, die von M aus aufzutragen ist. Es ist aber

$$SQ = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

Die Polarprojektion ist höchst einfach. Die Meridiane werden wie bei allen azimutalen Polarprojektionen Geraden, die sich im Pol unter ihren wahren Winkeln schneiden. Jeder Punkt eines Parallelkreises β hat den Zenitabstand $\vartheta = 90^0 - \beta$, also ist der Radius seines Bildkreises gleich der Sehne seines Komplementwinkels auf 90^0 und hat den Wert

$$\varrho = 2r \sin\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right).$$

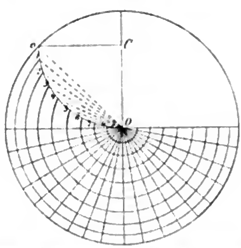


Fig. 58. Flächentreue zenitale Polarprojektion.

Daher die Konstruktion: Man trage vom Pol aus auf einem Meridian

die Länge $OC = r$ und hierauf senkrecht $CO = r$ auf, dann ist O ein Punkt des Äquators, denn $OO = r\sqrt{2}$. Schlägt man von C als Mittelpunkt einen Viertelkreis und teilt ihn in die nötigen Gradabteilungen, so sind die Verbindungslinien von O mit den Teilpunkten die Sehnen ϱ, d. h. die Halbmesser der betreffenden Parallelkreisbilder. Diese werden also ohne weiteres als konzentrische Kreise durch die Teilpunkte gelegt. Sie sind in Fig. 58 nur so weit ausgezogen, als sie nicht in die Konstruktionsfigur fallen.

In der Meridianprojektion erscheinen Mittelmeridian und Äquator als 2 aufeinander senkrechte Geraden. Man kann sie entweder geometrisch aus dem entsprechenden stereographischen Bild konstruieren, oder aber man benutzt für z die schon erwähnte Tabelle, der für diesen Fall noch eine andere hinzutritt, welche ϱ aus der Formel von S. 64 für den Radius $r = 1$ berechnet für alle Werte der Breite und Länge in Intervallen von 10^0 ergiebt. Diese Tabelle findet sich bei beiden schon genannten Autoren, Germain (S. 324) und Gretschel (S. 246).

Diesen Fall der äquivalenten Azimutalprojektion findet man z. B. angewandt bei den die Höhen und Tiefen darstellenden Planigloben auf Nr. 8 von Stielers Handatlas.

Die Längen sind bei der äquivalenten Azimutalprojektion in der Mitte dieselben wie auf der Kugel, weil ein kurzer von der Mitte ausgehender Bogen mit seiner Sehne zusammenfällt. Weiter entfernte Punkte liegen in der Karte näher bei der Mitte als auf der Kugel, weil die Sehne kürzer als der Bogen ist. Die senkrecht zum Radius gemessenen müssen, damit Flächengleichheit bleibt, vergröfsert abgebildet werden. In der That verhält sich beim Zenitabstand ϑ der Bildkreis zum Kugelkreis wie der Radius des ersten zu dem des letzteren, also (Fig. 56):

$$MB : BD = 2r \sin\frac{\vartheta}{2} : r \sin\vartheta .$$

Setzt man

$$\sin\vartheta = 2\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2},$$

so ergiebt sich das Verhältnis von $1 : \cos\frac{\vartheta}{2}$, welches zwar immer gröfser als 1 ist, aber bei wachsendem ϑ nur sehr langsam zunimmt. Die Winkelverzerrungen, die hierdurch entstehn, sind deshalb nicht bedeutend und die Projektion aus diesem Grunde sehr zu empfehlen. Für ganze Kontinente, z. B. Asien, giebt sie viel bessere und zweckmäfsigere Darstellungen als die in Atlanten gewöhnlich hierfür angewandten Projektionen (Bonnesche oder Flamsteedsche). Nur die

unbequemere Konstruktion ist die Ursache, dafs man sie so wenig gebraucht findet. Fig. 59 giebt ein Netz für Asia-Europa im Mafsstab von 1 : 120 000 000 in der Mitte.

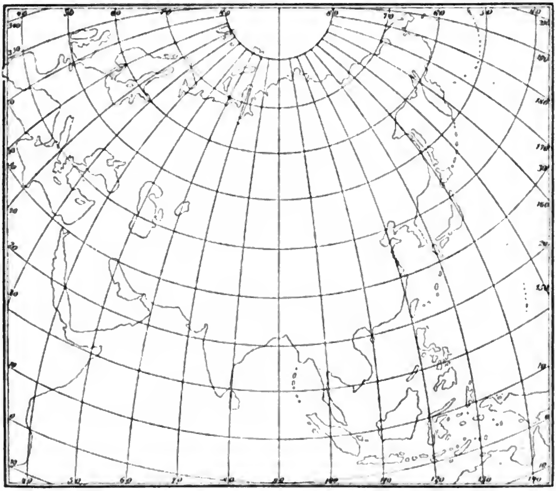


Fig. 59. Asia-Europa in Lamberts flächentreuer Zenitalprojektion.

Dasselbe ist nach der folgenden Tabelle für die Azimute z und Entfernungen ϱ entworfen, indem der Schnittpunkt des 40sten Parallelkreises mit dem 90sten Meridian östlich von Greenwich als Mitte angenommen ist und λ die Längendifferenz gegen diesen Meridian bedeutet. Die Tabelle ist neu berechnet, in der Absicht die allgemeinere Einführung dieser Darstellung für Asien, welche die empfehlenswerteste von allen ist, zu fördern*).

*) Die flächentreue Zenitalprojektion ist neuerdings von Colonel de Coatpont für Planigloben wie auch insbesondere zur Darstellung von Asien angelegentlich empfohlen worden; s. Bulletin de la société de géographie de Paris, 6me série T. 13 (1877) p. 151; T. 16 (1878) p. 5.

Flächentreue Zenitalprojektion auf den Horizont eines Punktes unter 40° N. Br. (Asien).

Azimute z und Mittabstände ϱ für den Kugelhalbmesser = 100.

β	λ =	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°
80°	z =	0°	2° 41′	5° 12′	7° 32′	9° 28′	11° 2′	12° 9′	12° 50′	13° 6′	12° 58′	12° 28′	
	ϱ =	68,40	68,70	69,56	70,96	72,81	75,03	77,52	80,19	82,93	85,67	88,03	
70°	z =	0°	6° 44′	12° 50′	17° 54′	21° 44′	24° 22′	25° 54′	26° 30′	26° 18′	25° 25′	23° 58′	
	ϱ =	51,76	52,52	54,98	58,14	62,49	67,46	72,80	78,27	83,72	88,99	93,95	
60°	z =	0°	14° 3′	25° 19′	33° 0′	37° 37′	39° 59′	40° 44′	40° 20′	39° 1′	37° 0′	34° 24′	
	ϱ =	34,73	36,37	40,84	47,25	54,76	62,79	70,97	79,04	86,81	94,16	100,94	
50°	z =	0°	31° 48′	47° 54′	54° 31′	56° 45′	56° 53′	55° 40′	53° 35′	50° 52′	47° 36′	43° 52′	39° 43′
	ϱ =	17,43	21,30	29,96	40,30	51,12	61,82	72,30	82,36	91,88	100,76	108,92	116,08
40°	z =	0°	87° 46′	84° 10′	80° 17′	76° 51′	73° 19′	69° 39′	65° 46′	61° 39′	57° 16′	52° 33′	47° 27′
	ϱ =	0	13,34	26,57	39,65	52,40	64,75	76,60	87,88	98,48	108,33	117,37	125,46
30°	z =	180°	137° 40′	115° 17′	102° 51′	94° 26′	87° 53′	82° 3′	76° 41′	71° 26′			
	ϱ =	17,43	22,48	33,22	45,62	58,38	71,02	83,29	95,05	106,15			
20°	z =	180°	153° 53′	136° 23′	119° 3′	108° 22′	99° 56′	92° 50′					
	ϱ =	34,73	37,75	45,59	55,99	67,63	79,68	91,68					
10°	z =	180°	160° 46′	143° 54′	130° 8′	119° 4′	109° 57′	102° 8′					
	ϱ =	51,76	53,93	59,91	68,56	78,80	89,82	101,11					
0°	z =	180°	164° 40′	150° 29′	138° 4′	127° 27′	118° 21′						
	ϱ =	68,40	70,09	74,85	82,05	90,90	100,76						
— 10°	z =	180°	167° 16′	155° 10′	144° 8′	134° 19′	125° 35′						
	ϱ =	84,52	85,87	89,75	95,74	103,32	111,95						
— 20°	z =					140° 11′	132° 6′						
	ϱ =					115,62	123,05						

Dieselbe auf den Horizont eines Punktes unter $52\frac{1}{2}$° N. Br. (Europa)*).

β	$\lambda =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
80°	$z =$	0°	3° 43′	7° 12′	10° 15′	12° 44′	14° 36′
	$\varrho =$	47,54	47,88	48,86	50,41	52,47	54,90
70°	$z =$	0°	11° 1′	20° 15′	26° 53′	31° 8′	33° 23′
	$\varrho =$	30,43	31,46	34,30	37,66	43,57	49,12
60°	$z =$	0°	32° 18′	48° 1′	53° 39′	55° 14′	54° 35′
	$\varrho =$	13,08	16,30	23,16	27,98	36,50	48,44
50°	$z =$	180°	109° 30′	90° 0′	85° 12′	79° 40′	74° 17′
	$\varrho =$	4,36	11,86	22,12	32,69	43,00	53,06
40°	$z =$	180°	147° 25′	124° 25′	109° 27′	98° 35′	89° 30′
	$\varrho =$	21,77	24,89	32,18	41,53	51,54	61,69
30°	$z =$	180°	158° 2′	139° 1′	123° 52′	111° 44′	101° 43′
	$\varrho =$	39,02	41,07	46,43	54,18	63,16	72,73

II. Konventionelle Projektionen auf die Ebene.

1. Unter diesen hat nur die **Globularprojektion** (auch wohl Arrowsmith's Projektion genannt) einige Bedeutung und wird fast ausschliefslich in Äquatorialprojektion zu Planigloben benutzt. Die Vorschrift ist die: Alle Meridiane und Parallelkreise sollen Kreisbogen sein, welche den Mittelmeridian, den Äquator und den Begrenzungskreis in gleiche Teile teilen. Bei Ausführung von 10 zu 10° hat man also, nachdem Äquator und Mittelmeridian als rechtwinklig sich schneidende Durchmesser des Grenzkreises gezogen sind, letzteren in 36, die beiden ersteren von der Mitte nach der Peripherie in je 9 gleiche Teile zu teilen. Man hat nun für jeden Meridian 3 Punkte, nämlich die Pole und den Äquatorschnitt, für jeden Parallelkreis gleichfalls 3 Punkte, nämlich 2 Durchschnitte mit dem Grenzkreis und denjenigen mit dem Mittelmeridian. Durch 3 Punkte ist ein Kreis bestimmt. — Die Ausführung ist dadurch erleichtert, dafs die Mittelpunkte der Parallelkreise auf dem Mittelmeridian, diejenigen der Meridiane auf dem Äquator (bez. deren Verlängerungen) liegen. Um den Mittelpunkt eines Meridians zu finden, verbindet man den Äquatorschnittpunkt desselben mit einem Pol und errichtet in dem Hal-

*) Die folgenden Werte von z und die zur Berechnung von ϱ benutzten Werte des Zenitabstandes sind den für eine Hemisphäre mit dem Mittelpunkt Berlin berechneten Tabellen von Doergens entnommen, (siehe dessen Theorie und Praxis der geogr. Kartennetze I. (einz.) Teil, S. 40 u. 41), wo indessen übersehen ist, dafs die Azimute zum Teil gröfser als 90° werden und beim Aufschlagen des Winkels zum gegebenen Sinus das Supplement auf 180° zu dem in der Tabelle aufgenommenen hätte gesetzt werden müssen.

bierungspunkt dieser Sehne eine Senkrechte, deren Schnittpunkt mit dem verlängerten Äquator den Kreismittelpunkt giebt. Ebenso findet man aus den Schnitten eines Parallelkreises mit dem Mittelmeridian und dem Rande seinen Mittelpunkt auf dem verlängerten Mittelmeridian.

Das Bild (Fig. 60) der globularen Äquatorialprojektion ist dem der äquidistanten Zenitalprojektion sehr ähnlich, weil in beiden die Einteilung von Äquator, Grenz- und Mittelmeridian die gleiche ist; allein in der äquidistanten Projektion sind die Netzlinien keine Kreise, sondern Kurven höherer Ordnung. Alle übrigen Netzpunkte liegen deshalb dort anders. Wendet man die Vorschriften der Globularprojektion auf die Polarabbildung an, so erhält man allerdings dasselbe Bild wie durch die äquidistante Projektion.

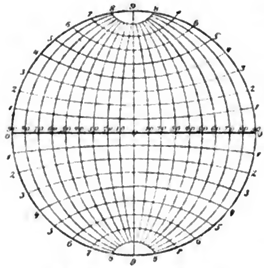


Fig. 60. Globularprojektion.

2. Entwirft man einen Parallelkreis einmal nach der Globularprojektion und dann nach der stereographischen Projektion, so schneiden beide sich in den Schnittpunkten mit dem Grenzkreise. Zieht man nun einen Kreis durch dieselben Schnittpunkte, der überall in der Mitte zwischen jenen beiden Kreisen liegt, und verfährt dann ebenso mit den Meridianen, so erhält man eine neue Projektion: **Nell's modifizierte Globularprojektion,** die gleichfalls aus lauter Kreisbogen besteht und minder starke Abweichungen von der Winkeltreue zeigt, als die gewöhnliche Globularprojektion*).

*) Nell, Vorschlag zu einer neuen Chartenprojektion, Inauguralschrift, Heidelberg 1852; wieder ans Licht gezogen von Debes, Mitteil. des Vereins für Erdkunde zu Leipzig 1882.

Zweites Kapitel:
Projektionen auf abwickelbare Flächen.

Wie schon in der Einleitung S. 25 ausgesprochen, hat die Absicht, volle Übereinstimmung zwischen Urbild und Abbild in mehr als einem Punkte, und zwar längs einer Kreislinie zu erhalten, zu den Projektionen auf abwickelbare Flächen, Cylinder und Kegel, geführt.

Soll ein Teil der Kugeloberfläche auf einen Kegelmantel abgebildet werden, so ist dies zunächst eine ganz unbestimmte Aufgabe, denn man kann auf der Kugeloberfläche irgend einen beliebigen Kreisbogen gezogen denken, in welchem die Oberfläche von einem Kegel berührt oder geschnitten werden soll. Soll, wie es meist gefordert wird, die Abbildung auf einen Berührungskegel ausgeführt werden, dann giebt es allerdings, nachdem der Berührungskreis ausgewählt ist, nur einen einzigen geraden Kegel, der die Kugel darin berührt, und zwar wird die Spitze dieses Kegels folgendermafsen gefunden: Wenn in der perspektivischen Zeichnung (Fig. 61) eines Teils der Kugel die Ellipse $KkKk$ den Kreis darstellt, längs dem ein Kegel berühren soll (es braucht in dem darzustellenden Gebiet nur ein Stück dieses Kreises zu liegen), so ziehe man einen Kugelradius Cc durch den Mittelpunkt c dieses Kreises, verbinde einen Kreispunkt K mit C und ziehe dann in der durch CK und Cc bestimmten Ebene die Linie TKS senkrecht zu KC. Diese Senkrechte ist dann Kugeltangente und ihr Schnittpunkt S ist die Spitze des Kegels, der entsteht, wenn man die Gerade ST als Erzeugungslinie unter Festhaltung des Punktes S längs dem Kreise $KkKk$ fortbewegt. Die Erzeugungslinie ist dann in jeder Lage Tangente an die Kugel; die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte liegen auf dem gegebenen Kreise, d. h. dieser Kreis wird durch die sämtlichen Berührungspunkte gebildet. Die Kreislinie schneidet die Erzeugungslinie überall senkrecht.

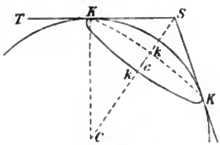


Fig. 61.

In der Anwendung wird man aber natürlich nicht eine beliebige Kreislinie des darzustellenden Gebietes wählen, um an sie einen Berührungskegel zu legen, sondern es wird sich meist nur um die ausgezeichneten Kreise des Netzes, Meridiane oder Parallelkreise handeln, insbesondere um den durch die Mitte des Gebiets gehenden Meri-

dian und Parallelkreis; denn da die Verzerrung des Bildes in der Richtung senkrecht zur Berührungslinie beiderseits zunimmt, so wird man letztere durch die Mitte des Gebiets gehn lassen, um beiderseits gleiche und ein gewisses Mafs nicht übersteigende Verzerrungen zu erhalten. — Wählt man den Meridian als Berührungskreis, so erhält man eine Cylinderprojektion, denn die obige Konstruktion (Fig. 61) auf diesen Fall angewandt zeigt, dafs die Spitze S in unendliche Entfernung fällt, dafs also die berührende Fläche erhalten wird, indem die Erzeugungslinie sich stets parallel dem auf der Meridianebene senkrecht stehenden Kugelradius längs der Meridianlinie hinbewegt. Diese Fläche ist ein Cylindermantel. — Wird hingegen ein Parallelkreis als Berührungslinie gewählt, so liegt die Spitze des Kegels in der verlängerten Erdachse und zwar um so näher der Erdoberfläche, je näher einem Pol der betreffende Parallelkreis liegt; um so weiter von der Erde, je näher der Parallelkreis dem Äquator liegt. Die Grenzfälle finden statt: 1) wenn der Parallelkreis $\pm 90^0$, also einer der Pole ist, dann fällt auch die Kegelspitze in den Pol und der Kegel verwandelt sich in eine Ebene, die die Kugel im Pol berührt; 2) wenn der Parallelkreis die Breite 0^0 hat, also der Äquator ist, dann verwandelt sich der Kegel in einen Cylinder, der die Kugel im Äquator berührt. — Da die Kegelspitze von allen Punkten des Berührungskreises gleich weit entfernt ist, so verwandelt sich dieser bei der Abwickelung in einen Kreisbogen, dessen Radius eben diese Entfernung, die sogenannte Kegelseite, ist. Beim Cylinder ist diese Entfernung unendlich grofs, folglich das Bild des Berührungskreises eine Gerade.

Mit der Wahl der Fläche, worauf die Projektion ausgeführt werden soll, ist über diese selbst noch gar nichts bestimmt. Sie kann nach beliebigem Gesetze ausgeführt werden, z. B. perspektivisch; eine Zentralprojektion auf Cylinder oder auf Kegel würde leicht ausführbar sein. Allein die Projektionsgesetze, die häufiger zur Anwendung kommen, sind andere, unter sich sehr verschiedene.

Fragt man zunächst, welches Prinzip von ähnlicher Allgemeinheit wie das der Azimutalität bei der Ebene etwa hier an die Spitze gestellt werden könnte, so kann kein Zweifel sein, dafs hier, wo eine Kreislinie an die Stelle eines Punktes tritt, die der Azimutalität analoge Forderung die ist, dafs jeder zu der gemeinschaftlichen Kreislinie senkrecht stehende gröfste Kreis als gerade Linie abgebildet werden und alle gleichweit von jener Linie auf der Kugel gelegenen Punkte auch auf der Abbildung gleichweit vom Bilde derselben entfernt liegen sollen. Da sich bei der Abwickelung der gemeinsame Berührungs- oder Schnittkreis als Kreisbogen abbildet, so müssen bei

jener Forderung alle auf ihm senkrechten gröfsten Kugelkreise sich als zu jenem Bogen senkrechte Geraden abbilden, die also Radien zu ihm und Erzeugungslinien des Kegels sind; alle zum Schnitt- oder Berührungskreis parallelen Kugelkreise müssen sich hingegen als konzentrische Kreisbogen abbilden.

Da bei den gewöhnlichen Kegelprojektionen der Schnitt- oder Berührungskreis stets ein Parallelkreis ist, so sind alle Parallelkreise konzentrische Kreisbogen, die Meridiane Geraden. Findet die Berührung im Äquator statt, so hat man Cylinderprojektion, wobei auch die Parallelkreise Geraden (Kreisbogen von unendlich grofsem Durchmesser) werden. (Hat man auf einen Cylinder projiziert, der in einem Meridian berührt, so werden weder Parallelkreise noch Meridiane Geraden oder Kreise). Im Folgenden werden Projektionen, die diesem Prinzip der Abbildung unterworfen sind, als wahre Cylinder- und wahre Kegelprojektionen von den konventionellen unterschieden werden. Sie sind, falls die Projektionsfläche mit der Erde konaxial ist, leicht an den geradlinigen Meridianen zu erkennen.

Mit der Grundeigenschaft kann man nun wieder eine der Forderungen der Äquidistanz vom Berührungskreis, der Flächentreue oder der Winkeltreue, verbinden, wodurch dann je eine Projektion bestimmt wird.

I. Cylinderprojektionen.

A. Wahre Cylinderprojektionen.

1. Die **äquidistante Cylinderprojektion oder Plattkarte** erhält man, indem man den Cylinder im Äquator berühren läfst, und alle Parallelkreise in ihren wahren Bogenabständen vom Äquator einträgt. Da der Äquator sich als gerade Linie in seiner wahren Länge abwickelt, so wird das Netz bei Voraussetzung vollkommener Kugelgestalt ein Netz von Quadraten, deren Seite gleich dem betreffenden Teil des Erdumfangs ist; also, wenn die Netzlinien von Grad zu Grad gezogen werden sollen, der 360ste Teil des Erdumfangs = 15 Meilen. Die Plattkarten empfehlen sich wegen der grofsen Einfachheit ihrer Konstruktion, namentlich zur Einzeichnung von Routenaufnahmen für Reisende in Gegenden niedriger geographischer Breite. In höheren Breiten wird die Karte natürlich bald zunehmend ungenau, weil die Parallelgrade von konstanter Länge bleiben, während sie in Wirklichkeit zum Pol bis auf Null abnehmen. Da die Meridiangrade wie in der Natur dieselbe Länge behalten, so wächst die Verzerrung der Winkel mit Annäherung an den Pol sehr stark. Nur für schmale Zonen zu beiden Seiten des Äquators giebt diese Projektionsart gute Resultate.

2. Läfst man den Cylinder im Meridian berühren, so erhält man bei äquidistanter Abbildung die **Cassini-Soldner'sche Projektion**, welche Cassini zuerst bei seiner berühmten grofsen topographischen Karte von Frankreich, später Soldner für den topographischen Atlas des Königreichs Bayern angewandt hat und die auch den Generalstabskarten von Württemberg und Baden zu Grunde liegt. Wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, eignet sie sich besonders für Gebiete, die in der Richtung eines Meridians lang hingestreckt sind; für eine Karte von Chile würde sie vorzüglich geeignet sein.

Die Übertragung eines Punktes auf den im Mittelmeridian M berührenden Cylinder YY' geschieht dadurch, dafs man durch den Punkt B und die Cylinderachse XCX' eine Ebene gelegt denkt (in welcher Fig. 62 entworfen ist) und in dieser Ebene das Bild B' des Punktes B so bestimmt, dafs die Strecke $B'M$ gleich dem Bogen BM wird. Dadurch erhalten alle Punkte, die auf der Erdoberfläche

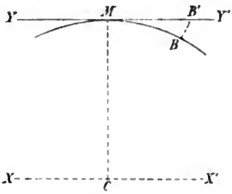


Fig. 62.

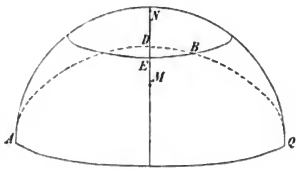


Fig. 63.

in gleichem Bogenabstand vom Mittelmeridian liegen, auch in der Karte denselben Abstand von ihm. Um das Netz der Meridiane und Parallelkreise, bez. ihre Schnittpunkte nach der Cassini-Soldner'schen Art zu projizieren, ist vor allem nötig, für jeden solchen Schnittpunkt den längs einem gröfsten Kreis gemessenen Abstand vom Mittelmeridian und den Abstand des Durchschnittspunktes jenes gröfsten Kreises mit diesem Meridian von einem gegebenen Fixpunkt desselben, z. B. der Kartenmitte zu bestimmen. Denn es ist nicht aufser acht zu lassen, dafs letzterer Abstand nicht etwa die Breitendifferenz beider Punkte ist. Stellt Fig. 63 eine perspektivische Ansicht der nördlichen Hemisphäre dar, N den Pol und AQ den Äquator, ferner M die Mitte des abzubildenden Gebietes und MN den Mittelmeridian, so ist für einen Punkt B BD der zu bestimmende, zum Mittelmeridian senkrechtstehende Bogen des gröfsten Kreises $ADBQ$ und MD der zu bestimmende Schnittpunktsabstand, während ME die Breitendifferenz, BE der Parallelkreisbogen ist. Die trigonometrische Bestimmung ersterer beiden Gröfsen, der sogenannten rechtwinkligen sphä-

rischen Koordinaten (auch Soldner'sche Koordinaten genannt) durch Breiten- und Längendifferenz soll hier nicht durchgeführt werden. Die Anwendung dieser Projektionsart ist besonders einfach, wenn es sich um direkte Auftragung einer Landesvermessung handelt, wobei die Lage der einzelnen Punkte gegen einen Fixpunkt (Sternwarte) meist direkt durch rechtwinklige sphärische Koordinaten bestimmt wird. Diese sind dann in der Karte ohne weiteres als geradlinige rechtwinklige Koordinaten aufzutragen*). — Auf die Abweichung von der vollkommenen Kugelgestalt kann bei dieser wie bei der vorigen Projektion leicht Rücksicht genommen werden.

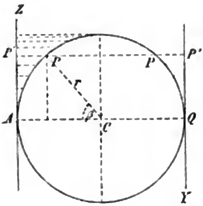


Fig. 64.

3. Projiziert man einen Parallelkreis PP von der Breite β auf den im Äquator AQ berührenden Cylinder ZY, indem man seine Ebene bis zum Schnitt mit letzterem in $P'P'$ ausdehnt, so erhält man Lamberts **äquivalente Cylinderprojektion** (auch wohl isocylindrische genannt. Meridiane und Parallelkreise werden rechtwinklig sich schneidende Geraden. Die Entfernung des Parallelkreisbildes vom Äquator ist, wie man sieht:

$$y = AP' = CB = r \sin \beta.$$

Da die Kugelzone zwischen AQ und PP denselben Flächeninhalt besitzt wie das Cylindermantelstück von gleicher Basis und Höhe $AP' = CB$, so ist Flächentreue vorhanden. Schon der Anblick der Figur lehrt, dafs den Polen zu die Parallelkreisbilder immer näher zusammenrücken, also die Gestalt der Netzvierecke der Natur immer unähnlicher, der Pol selbst durch eine Gerade abgebildet wird. — Auch diese Projektion ist deshalb nur für dem Äquator benachbarte Zonen empfehlenswert. Sie ist in Fig. 66 dargestellt.

4. Die **Merkatorprojektion** ist die winkeltreue Cylinderprojektion. Um den Abstand y des β^{ten} Parallelkreises vom Äquator zu erhalten, giebt es keine einfache geometrische Konstruktion. Die Formel dafür:

$$y = \frac{r}{M} \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right)$$

(worin $M = 0{,}43429$ der Modul des gemeinen Logarithmensystems ist) läfst sich aus der Forderung der Winkeltreue mathematisch ab-

*) Formeln und Tabellen zur Verwandlung Soldner'scher Koordinaten in geographische und umgekehrt findet man in Jordan, Handbuch der Vermessungskunde II, S. 283—293.

leiten, worauf jedoch hier nicht eingegangen werden kann. Wie bei allen wahren Cylinderprojektionen sind die Parallelkreise gleich dem Äquator und also auch die Parallelgrade gleich den Äquatorgraden. Da nun der Äquator die Länge $2r\pi$, der Parallelkreis von der Breite β den Radius $r\cos\beta$, folglich den Umfang $2r\pi\cos\beta$ hat, so erscheint jede Länge auf diesem Parallelkreis im Verhältnis von $1 : \cos\beta$ vergröſsert. Wegen der Konformität ist dies für jede beliebige Richtung die Vergröſserung auf dem β^{ten} Parallel. Dieselbe wächst mit zunehmender Breite.

Die Formel lehrt, daſs für $\beta = 0$ auch $y = 0$ wird, weil $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ und $\operatorname{Log} 1 = 0$ ist; ferner daſs für $\beta = 90^0$ $y = \infty$ wird, die Projektion sich also bis in die Unendlichkeit ausdehnt; aber das starke Wachstum trifft vorzugsweise die letzten 10 Grade zwischen 80^0 und 90^0. Man kann deshalb auf einem mäſsigen Blatte nach der Merkatorprojektion die Erdoberfläche mit Ausnahme der innerhalb 80^0 nördl. und südl. Breite enthaltenen Polarzonen darstellen. Die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt läſst sich bei der Merkatorprojektion leicht berücksichtigen, d. h. man kann auch die konforme Cylinderprojektion des Rotationsellipsoids entwerfen, das der Erdgestalt am nächsten kommt. Es tritt dann dem obigen Ausdruck für y noch ein von der Abplattung der Erde abhängiges Korrektionsglied hinzu, das aber den Wert von y nur wenig ändert. Nachfolgende kleine Tafel giebt von 5 zu 5^0 den bereits wegen der elliptischen Gestalt korrigierten Zahlenwert von y in Kilometern, wobei für r der wirkliche Wert des Erdradius 6 370 km gesetzt ist. Für einen Entwurf, der die Längen auf dem Äquator im Maſsstab von $1 : n$ verkleinern soll, sind dann die Werte der Tafel durch n zu dividieren, um (zunächst in Kilometern ausgedrückt) die in die Karte einzutragenden Abstände zu ergeben. Die mit v überschriebene Kolumne enthält das Vergröſserungsverhältnis auf dem betreffenden Breitegrad, also den Wert $1 : \cos\beta$, aber noch korrigiert wegen der ellipsoidischen Gestalt. Der wirkliche Maſsstab für Längen auf diesem Breitegrad ist also $= v : n$.

β	y	v	β	y	v	β	y	v
5^0	553,5	1,004	35^0	4139,0	1,220	65^0	9 568,6	2,360
10	1111,4	1,015	40	4838,0	1,303	70	11 027,3	2,914
15	1678,0	1,035	45	5590,7	1,412	75	12 889,5	3,851
20	2258,2	1,064	50	6412,9	1,552	80	15 494,9	5,740
25	2857,4	1,103	55	7326,1	1,740	85	19 927,1	11,436
30	3481,8	1,154	60	8361,8	1,995	90	∞	∞

Eine ausführlichere, von Grad zu Grad fortschreitende Tafel der Äquatorabstände *y* findet man in der vierten Kolumne der Tabelle auf S. 86. Dieselbe ist ein Auszug der in Halbgradintervallen fortschreitenden Tafel von Wagner im Geogr. Jahrbuch Bd. III (1870), S. XLVI.

Wenn man einen Kilometer- oder Meilenmafsstab*) für den Äquator konstruiert, so sind dessen Abteilungen zur Abmessung auf anderen Parallelkreisen zu klein. Man erhält aber die für eine andere Breite gültige Längeneinheit aus jener durch Multiplikation mit dem aus der Tabelle zu entnehmenden *v*. Man kann also leicht eine Reihe von Mafsstäben für die Parallelkreise 5°, 10°, 15° ... 85° herstellen, wenn man die für den Äquator gültige Längeneinheit mit dem jeweiligen *v* multipliziert aufträgt. Thut man dies auf gleich abständigen Parallellinien, deren Nullpunkte vertikal übereinanderliegen, so erhält man Fig. 65, wo die Mafsstäbe aber nur je für den 10ten

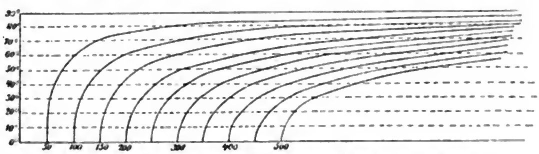


Fig. 65. Mafsstab für die wachsenden Breiten in Merkators Projektion.

Grad angegeben sind. Die Figur stellt beim Äquatorialmafsstab von 1 : 75 000 000 einen Mafsstab für die wachsenden Breiten dar, dessen Einheitsstrecke = 50 Meilen angenommen ist. Verbindet man die entsprechenden Teilungspunkte der einzelnen Mafsstäbe durch je eine stetige Kurve, so kann man auch für andere Breiten, z. B. von 37° die Längen abmessen, indem man zwischen den Punkten 30° und 40° nach dem Augenmafs denjenigen aufsucht, der 37° entsprechen würde, und durch ihn eine Parallele zu den übrigen Geraden gelegt denkt; die Kurven teilen dann diese Gerade in die erforderlichen 50-Meilenabteilungen. Hat man eine Strecke zu messen, deren Endpunkte auf verschiedenen Breitengraden liegen (z. B. auf dem 42sten und 48sten), so benutzt man den zum mittleren Parallel (hier dem 45sten) gehörigen Mafsstab.

Merkators Projektion wird sehr viel benutzt und zwar *a*) für Karten, welche die Verbreitung allgemeiner, namentlich physikalischer Verhältnisse über die ganze bekannte Erdoberfläche darstellen und mit einem Blick übersehen lassen sollen; *b*) für Seekarten über gröfsere oder kleinere Teile des Meeres. Namentlich für letztere ist die Bei-

*) Vgl. S. 27.

setzung eines Mafsstabs der wachsenden Breiten dringend nötig. Die vorzügliche Eignung der Merkatorprojektion für Seekarten beruht auf der Verbindung der Winkeltreue mit der Geradlinigkeit des Netzes. Für den Seefahrer ist es die wichtigste Aufgabe, möglichst rasch und sicher auf der Karte den Ort bezeichnen zu können, wo er sich befindet. Er löst diese Aufgabe, indem er, von einem bekannten Ort ausgehend, den gesegelten Kurs in die Karte absetzt

Äquatorialmafsstab für alle drei Figuren: 1 : 111 000 000.

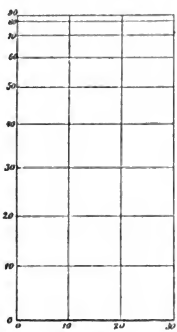


Fig. 66.
Isocylindrische Projektion.

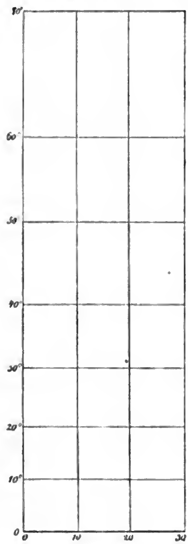


Fig. 67.
Merkators Projektion.

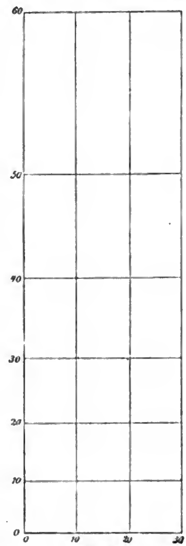


Fig. 68.
Zentralcylinderperspektive.

(d. h. einzeichnet). Das Schiff wird nach dem Kompafs gesteuert und seine Geschwindigkeit durch das Log gemessen. Der Kompafs lehrt die Richtung kennen, welche der Kurs gegen den magnetischen Meridian bildet und, da dem Schiffer die Misweisung der Magnetnadel bekannt ist, auch den Winkel des Kurses gegen den astronomischen Meridian. So lange das Schiff denselben Kurs steuert, schneidet es alle Meridiane unter demselben Winkel. Die Linie, welche es auf der Erdoberfläche zurückgelegt, d. h. die Kurve, die alle Meridiane unter gleichem Winkel schneidet, nennt man eine Loxodrome. Auf der Kugeloberfläche hat diese Kurve einen spiralig dem Pol immer

mehr sich nähernden, ihn aber nie erreichenden Verlauf. Da in der Merkatorkarte alle Meridiane parallele Geraden sind, so wird auch die Abbildung der Loxodrome eine Gerade, weil wegen der Winkeltreue jeder Schnittwinkel in der Abbildung derselbe wie auf der Kugel selbst sein mufs und eine Schar paralleler Geraden nur von einer Geraden unter einem und demselben Winkel geschnitten werden kann. Der Seefahrer kann also seinen Kurs in die Karte als gerade Linie eintragen, deren Winkel gegen die Meridiane ihm der Kompafs angiebt. Die in Meilen gemessene oder geschätzte Länge der zurückgelegten Strecke wird nach dem für den betreffenden Breitengrad gültigen Mafsstab aufgetragen.

5. In der vergleichenden Darstellung Fig. 66, 67, 68 findet man die isocylindrische und die Merkatorprojektion noch zusammengestellt mit der **Zentralperspektive auf die Cylinderoberfläche,** die durch Strahlen von dem im Kugelzentrum angenommenen Auge entsteht. Der Vergleich lehrt, welche Vorteile ihr gegenüber die Merkatorprojektion wegen der geringeren Auseinanderzerrung in höheren Breiten besitzt, abgesehen von den besprochenen geometrischen Eigenschaften. Die Projektion Fig. 68 wird deshalb nie angewandt.

B. Konventionelle Cylinderprojektionen.

Unter diesem Namen sollen hier nur 2 bekannte Entwurfsarten vorgeführt werden, die das Gemeinsame haben, dafs sie beide äquivalent sind und bei beiden der Mittelmeridian bevorzugt wird. Er wird allein von allen Meridianen als gerade zum Äquatorbild senkrechte Linie durch dessen Mitte gezogen. Der Äquator wird in seiner wahren Länge abgewickelt.

1. Bei der **Sanson-Flamsteed'schen Projektion,** die von Sanson erfunden ist, meist aber nach Flamsteed benannt wird, der sie wieder in Aufnahme brachte, werden die Meridiangrade auf dem Mittelmeridian in ihrer wahren Länge aufgetragen und die Parallelkreise als zum Äquator parallele Geraden durch die Teilpunkte gelegt. Auf ihnen werden dann die Parallelgrade in ihrer wahren Gröfse links und rechts vom Mittelmeridian aufgetragen und die entsprechenden Teilpunkte durch stetige Kurven verbunden, die die Meridiane darstellen. Dafs die Abbildung äquivalent ist, folgt aus der Betrachtung eines kleinen Netzvierecks in beliebiger Lage, dessen Seiten nur so klein anzunehmen sind, dafs sie als gerade Linien angesehen werden können, also z. B. 1″ Breitendifferenz und 1″ Längendifferenz entsprechend. Ein solches Viereck auf der Kugel ist ein Paralleltrapez

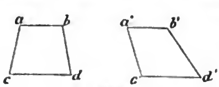


Fig. 69.

abcd, dessen Flächeninhalt gleich der halben Summe der beiden Parallelseiten multipliziert mit der Höhe ist. In der Abbildung ist es ein verschobenes Paralleltrapez $a'b'c'd'$, dessen Parallelseiten der Konstruktion gemäfs unverändert aufgetragen sind, d. h. $a'b' = ab$, $c'd' = cd$. Auch ist der senkrechte Abstand der beiden Parallelseiten in seiner wahren Länge abgebildet. Folglich bleiben beide den Flächeninhalt ergebenden Faktoren unverändert. Die Flächentreue ist also für ein beliebig kleines Netzviereck und damit überhaupt erwiesen, denn man kann jedes beliebige Areal aus sehr kleinen Viereckchen zusammengesetzt denken.

Auch diese Projektion eignet sich besonders zur Darstellung von Äquatorialgebieten der Erde und wird z. B. für die Karte von Afrika fast in allen bekannteren Atlanten verwendet. Es läfst sich nach ihr die ganze Erde darstellen; der Grenzmeridian hat dann eine eigentümliche Form, mit Ecken von $144^0\,41'$ an den Polen; die Länge der

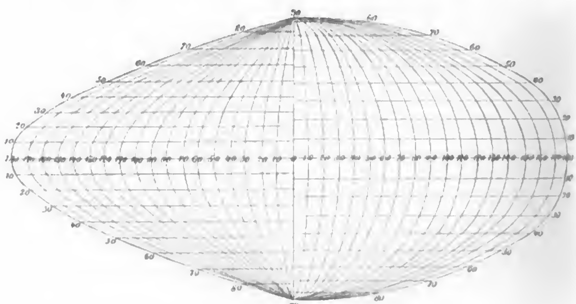


Fig. 70. Sanson-Flamsteeds Projektion. | Mollweides (Babinets homalographische) Proj.

Karte ist gleich dem Äquator also $= 2r\pi$, die Höhe gleich einem halben Meridian also $= r\pi$. Die Fig. 70 stellt in ihrer linken Hälfte die halbe Flamsteedsche Projektion, in ihrer rechten

2. die halbe **Mollweidesche oder Babinets homalographische Projektion** der ganzen Erde dar. Hierbei ist die Forderung gestellt worden, unter Aufgabe der gleichmäfsigen Einteilung des Mittelmeridians, aber mit Beibehaltung der geradlinigen Parallelen, eine äquivalente Projektion herzustellen, deren Meridiane Ellipsen sind. Das Halbkugelbild mufs dann von einem Kreis begrenzt sein, dessen Inhalt gleich der Halbkugelfläche ist. Ist der Kreisradius ϱ, so mufs also

$$\varrho^2\pi = 2r^2\pi \quad \text{sein, oder} \quad \varrho = r\sqrt{2}\,.$$

Wenn man für irgend eine beliebige Kugelzone und den entsprechenden Ellipsenstreifen die entsprechende Gleichung aufstellt, so erhält man eine Formel, welche die Durchschnittspunkte der Parallelen auf dem Mittelmeridian bestimmt.

Statt derselben folgt hier eine danach von Bourdin berechnete Tafel, welche für die Länge 1 des Projektionsradius die Abstände der Parallelkreise von 5 zu 5° vom Äquator giebt:

5°	10	15	20	25	30	35	40°
0,069	0,137	0,205	0,272	0,339	0,404	0,468	0,531

45°	50	55	60	65	70	75	80	85°
0,592	0,651	0,708	0,762	0,814	0,862	0,906	0,945	0,978

Wie man sieht, rücken die Parallelen polwärts immer näher zusammen. — Hat man durch die so bestimmten Punkte die Parallelen gezogen, so ist die Strecke vom Mittel- bis zum Grenzmeridian nur in die betreffende Anzahl gleicher Teile zu teilen (in der Fig. 70 in 9), so erhält man die Meridianpunkte, durch die man dann die Ellipse zu legen hat. — Verlängert man jeden Parallel und trägt die Teile desselben je 9mal nach aufsen auf, so erhält man durch Verbindung der Durchschnittspunkte auch die Meridiane der andern Erdhälfte und somit die ganze Erdoberfläche in einer Ellipse dargestellt, deren grofse Achse gleich der doppelten kleinen ist. — Wiewohl diese Projektion, namentlich in den Polargegenden, starke Verzerrungen zeigt, so ist sie doch wegen ihrer Flächentreue für viele Darstellungen aus der allgemeinen und physikalischen Erdkunde mehr zu empfehlen, als die bisher fast ausschliefslich hierfür benutzte Merkatorprojektion.

II. Kegelprojektionen.

A. Echte Kegelprojektionen.

Die Kegelprojektionen sind besonders zweckmäfsig für Gebiete, die vorwiegend in der Richtung der Parallelkreise ausgedehnt sind, aber in beliebiger Gegend der Kugeloberfläche liegen können. Man sucht den Parallelkreis aus, der das darzustellende Gebiet in der Mitte durchschneidet und legt an diesen den Berührungskegel (oder durch denselben einen Schnittkegel). Die Fig. 71 ist in einer Meridianebene entworfen. CK ist die Erdachse, P der Durchschnittspunkt des Mittelparallels; dann ist ZK die Erzeugungslinie des Berührungskegels. Durch denselben Parallelkreis können unendlich viele Kegel gelegt werden, die alle

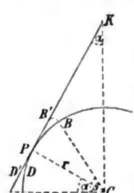


Fig. 71.

dieselbe Achse haben. Es genügt, vorläufig nur vom Berührungskegel zu sprechen. Als wahre Kegelprojektionen bezeichnet man gemäfs dem auf S. 73 auseinandergesetzten nur solche, bei denen alle Meridiane sich als gerade, zu den Parallelkreisen senkrechte Linien projizieren, also die Durchschnittslinien der Meridianebenen mit der Kegelfläche, d. h. Kegelseiten sind. Die Art, wie nun ein Punkt B eines Meridians auf die Kegelseite BK projiziert wird, kann sehr verschieden sein.

1. Die **äquidistante oder gewöhnliche Kegelprojektion.** Jeder Punkt B, D wird so nach B', D' projiziert, dafs die Bogenabstände vom Mittelparallel BP und DP beziehungsweise gleich den geraden Abständen $B'P$ und $D'P$ werden. Dadurch erhalten alle Parallelkreise in der Abbildung denselben Abstand von einander, wie auf der Kugel. Bei der Abwickelung des Kegelmantels werden die Meridiane Geraden, die unter gleichen Winkeln vom Punkt K ausgehen; die Parallelkreise gleich abständige Kreisbogen mit K als Mittelpunkt. Der Radius des Mittelparallels ist $= KP$; der des durch B' gehenden Parallels $= KB' = KP - BP$. Der Radius KP ist leicht zu konstruieren, oder auch durch Rechnung zu bestimmen. Ist α die Breite des Mittelparallels, also der Winkel PCQ, so ist auch $\sphericalangle CKP = \alpha$, weil die Schenkel beider Winkel senkrecht auf einander stehen. Die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks CKP, dessen einer Winkel α, dessen gegenüberliegende Kathete gleich dem Kugelradius r ist, liefert also als anliegende Kathete den gesuchten Radius $KP = R_0$. Wie man sieht, ist:

$$R_0 = r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Um die Bogenlänge $BP = b$ zu finden, die zu dem Winkel

$$BCP = \beta - \alpha$$

gehört, setzt man die Gleichung an, welche ausdrückt, dafs sich BP zum ganzen Umkreis so verhält, wie der Winkel BCP zu 360^0, also:

$$BP = 2r\pi \frac{\beta - \alpha}{360} = b.$$

Sollen z. B. die Parallelkreise im Abstand von je 2^0 ausgezogen werden und gehört der Mittelparallel zu den aufzutragenden, so hat man $\beta - \alpha = 2^0$ zu setzen und erhält alsdann den Abstand b_2 je zweier Parallelkreise

$$b_2 = \frac{2r\pi}{180}.$$

Ist der Mittelparallel gezogen, so nimmt man demnach den Radius um b gröfser, um den nächsten südlichen Parallel, dann um b kleiner,

um den nächst nördlicheren zu erhalten; dann abermals um b gröfser bez. kleiner, um die darauffolgenden Parallelkreise zu erhalten. Auf dem Mittelparallel $P'P''$ (Fig. 72) sind die wahren Längen seiner Abteilungen rechts und links vom Mittelpunkt P aufzutragen. Der Radius dieses Parallelkreises ist bekanntlich $= r \cos \alpha$, sein Umfang also $= 2 r \pi \cos \alpha$. Eine geographische Längendifferenz λ entspricht sonach einem Bogen dieses Kreises von der Länge

$$AP = 2 r \pi \cos \alpha \cdot \frac{\lambda}{360} = d.$$

Ist wieder $\lambda = 2^0$, so wird der Bogenabstand zweier Meridiandurchschnitte

$$d_2 = \frac{r \pi \cos \alpha}{90}.$$

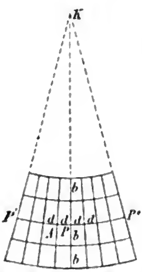


Fig. 72. Äquidistante Kegelprojektion.

Wenn der Entwurf in sehr grofsem Mafsstabe gemacht wird, wobei die Längendifferenz zwischen 2 aufeinanderfolgenden Meridianen eine sehr kleine ist, dann werden die Bogen d fast gerade Linien und man kann dieselben ohne erheblichen Fehler wie gerade Strecken von P aus beiderseits auftragen. Diese Vertauschung von Bogen und Sehne ist aber nicht mehr gestattet, wenn man grofse Genauigkeit erstrebt und wenn zwischen je 2 Meridianen ein Bogen von einem oder mehreren Geraden liegt. In diesem Falle mufs man den Winkel λ' berechnen, der an der Kegelspitze K zu dem betreffenden Bogen $AP = d$ des Mittelparallels gehört. Man setzt zu diesem Zweck wieder die Proportion an:

$$\lambda' : 360^0 = d : 2 R_0 \pi$$

und erhält, indem für d der vorstehende Ausdruck und $R_0 = r \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gesetzt wird:

$$\lambda' = \frac{r \lambda}{R_0} \cos \alpha = \lambda \sin \alpha.$$

Setzt man z. B. $\lambda = 2^0$, so wird $\lambda' = (2 \sin \alpha)^0$. Ist der Mittelparallel der 50$^{\text{ste}}$, so ist $\sin 50^0 = 0{,}766$, also:

$$\lambda' = 1{,}532^0 = 1^0\, 31'\, 55''.$$

Durch wiederholtes Antragen dieses Winkels an K zu beiden Seiten des Mittelparallels läfst sich das betreffende Meridiansystem auf die Karte einzeichnen. Diese Art des Auftragens ist aber nicht zu empfehlen, weil sie ziemlich starken Fehlern ausgesetzt ist. Es kommt hinzu, dafs bei einigermafsen grofsem Mafsstab die Parallelkreisradien zu grofs werden, als dafs man selbst mit Stangenzirkeln die Kreisbogen ausziehen

könnte. Es ist dann unerläfslich, die ohnehin viel genauere Methode der Eintragung mittels rechtwinkliger Koordinaten zu benutzen, zu deren Ausführung tabellarische Hilfsmittel zu Gebote stehen. Da diese Operation für alle Kegelabbildungen von Bedeutung ist, so mufs hier etwas näher darauf eingegangen werden.

Denkt man sich durch die Kartenmitte P eine senkrechte Gerade PX zum Mittelmeridian gelegt, so läfst sich jeder beliebige Punkt D, dessen Breite $= \beta$, dessen Längendifferenz gegen den Mittelmeridian $= \lambda$ ist, in die Karte eintragen, sobald man seinen Abstand y von der Linie PX und seinen Abstand x vom Mittelmeridian angeben kann. Diese sind aber leicht zu bestimmen, denn da bei gegebenen λ und α auch λ' berechnet werden kann, desgleichen der Radius R des Parallelkreisbogens bekannt ist, der durch D geht, so hat man:

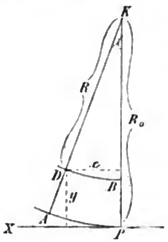


Fig. 73.

$$x = R \sin \lambda' \qquad y = R_0 - R \cos \lambda'.$$

Den Wert von y kann man für die Rechnung bequemer so umformen:

$$y = R_0 - R + R(1 - \cos \lambda') = R_0 - R + 2R \sin^2 \frac{\lambda'}{2}.$$

Die Differenz $R_0 - R = BP = b$ ist schon oben durch $\beta - \alpha$ ausgedrückt worden. Es ist also auch $R = R_0 - b$ bekannt und

$$x = (R_0 - b) \sin \lambda', \qquad y = 2(R_0 - b) \sin^2 \frac{\lambda'}{2} + b.$$

Für Punkte auf dem Mittelparallel verwandeln sich diese Formeln in folgende:

$$x_0 = R_0 \sin \lambda', \qquad y_0 = 2 R_0 \sin^2 \frac{\lambda'}{2}.$$

In der Regel wird beim Entwurf einer Karte nach der gewöhnlichen Kegelprojektion einer der wirklich auszuziehenden Meridiane als Mittelmeridian und einer der auszuziehenden Parallelkreise als Mittelparallel genommen. Das Netz ist alsdann symmetrisch zu beiden Seiten des Mittelmeridians. Man beginnt mit der Zeichnung dieses Meridians und der durch die Kartenmitte senkrecht hiezu gezogenen Abscissenachse. Durch die Bestimmung, wie grofs die Breitendifferenz zweier aufeinanderfolgenden, auszuziehenden Parallelkreise sein soll, ist $(\beta - \alpha)$ gegeben, woraus b nach der Formel (S. 82) zu berechnen ist. Ebenso ergiebt sich λ', sobald die Längendifferenz λ zweier aufeinanderfolgenden Meridiane und die Mittelbreite α gegeben sind. Für die Länge b des zwischen 2 gegebenen Parallelkreisen enthaltenen Meridianstücks hat man Tabellen, welche die Berechnung auf ein Minimum beschränken. Im Geographischen Jahr-

buch Bd. III., S. XXXII findet man, von Wagner aufgestellt, die Länge jedes einzelnen Meridiangrades in Metern angegeben, und zwar mit Rücksicht auf die Abplattung der Erde; also die Länge b für $\beta - \alpha = 1^0$ und für den wahren Wert des Erdradius r. Diese Tafel findet sich in gekürzten Zahlen S. 86, zweite Kolumne, wiedergegeben. Ist der Abstand der einzuzeichnenden Parallen nicht 1^0, sondern q^0, so ist der Tabellenwert mit q zu multiplizieren, wobei q auch ein Bruch z. B. $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{6}$ sein kann; endlich ist noch durch die Verjüngungszahl n zu dividieren, wenn der Kartenmafsstab $1 : n$ sein soll. Da $\lambda' = \lambda \sin \alpha$, so wird, wenn man $\lambda = 1^0$ setzt,

$$\lambda' = (\sin \alpha)^0.$$

Der Winkel λ', die sogenannte Meridiankonvergenz wird also für alle beliebigen Breiten des Mittelparallels aus einer Tafel für die wahren Werte des Sinus zu entnehmen sein. Manchen Tafelsammlungen sind Tafeln der natürlichen Werte der trigonometrischen Funktionen beigegeben. Die betreffende Tafel findet sich auch im Geogr. Jahrbuch III., S. XLVIII, *VII B*, und zwar hier mit Rücksicht auf die kleine Korrektion berechnet, die durch die ellipsoidische Erdgestalt bedingt ist. Auch hier hat man, wenn λ nicht 1^0 sondern q Grade beträgt, den Tabellenwert mit q zu multiplizieren.

Hat man b und λ, so braucht man noch R_0 um alle x und y berechnen zu können. Auch hierfür findet sich a. a. O. S. XLIV und XLV eine in Intervallen von $\frac{1}{2}^0$ und, daraus ausgezogen, S. 86 in der fünften Kolumne, eine in ganzen Graden fortschreitende Tabelle, deren Zahlen nur noch durch die Verjüngungszahl n zu dividieren sind.

Tabelle

enthaltend in Kolumne

I.: Die Geographische Breite von Grad zu Grad;

II.: Die Länge des vom Äquator aus bis zu dieser Breite gemessenen Meridianbogens*);

III.: Die Länge eines Parallelkreisgrades in dieser Breite;

IV.: Den Äquatorabstand des Parallelkreisbildes in Merkators Projektion.

V. Die Seitenlänge des in dem Parallelkreis berührenden Kegels, also den Radius des Parallelkreisbildes in der Projektion auf diesen Kegel.

Alle Längen sind in Kilometern angegeben.

---

*) Die Länge irgend eines Meridianabschnitts, z. B. eines bestimmten Grades ergiebt sich durch Subtraktion der seinen beiden Begrenzungsparallelen entsprechenden Zahlen der zweiten Kolumne.

Breite	Meridianlänge vom Äquator	Parallel-Gradlänge	Äquatorabstand für Merkatorprojektion	Parallelkreisradius für Kegelprojektion	Breite	Meridianlänge vom Äquator	Parallel-Gradlänge	Äquatorabstand für Merkatorprojektion	Parallelkreisradius für Kegelprojektion
0°	0	111,31	0	∞	45°	4 984,4	78,84	5 590,7	6 388
1	110,6	111,29	110,6	365 361	46	5 095,6	77,45	5 749,0	6 169
2	221,1	111,24	221,2	182 625	47	5 206,7	76,05	5 910,2	5 958
3	331,7	111,15	331,8	121 689	48	5 317,9	74,62	6 074,5	5 753
4	442,3	111,04	442,6	91 203	49	5 429,1	73,16	6 242,0	5 554
5	552,8	110,89	553,5	72 896	50	5 540,3	71,69	6 412,9	5 362
6	663,4	110,70	664,6	60 679	51	5 651,5	70,19	6 587,4	5 175
7	774,0	110,48	775,9	51 942	52	5 762,8	68,67	6 765,7	4 993
8	884,6	110,23	887,4	45 380	53	5 874,0	67,13	6 948,1	4 816
9	995,2	109,95	999,2	40 269	54	5 985,3	65,57	7 134,8	4 644
10	1 105,7	109,63	1 111,4	36 172	55	6 096,6	63,99	7 326,1	4 476
11	1 216,3	109,27	1 223,8	32 813	56	6 207,9	62,39	7 522,2	4 312
12	1 327,0	108,89	1 336,7	30 008	57	6 319,3	60,76	7 723,5	4 151
13	1 437,6	108,47	1 450,0	27 628	58	6 430,6	59,13	7 930,2	3 995
14	1 548,2	108,02	1 563,7	25 583	59	6 542,0	57,47	8 142,9	3 841
15	1 658,8	107,54	1 678,0	23 806	60	6 653,4	55,79	8 361,8	3 691
16	1 769,5	107,02	1 792,8	22 246	61	6 764,8	54,10	8 587,5	3 544
17	1 880,1	106,47	1 908,2	20 865	62	6 876,2	52,39	8 820,5	3 400
18	1 990,8	105,89	2 024,2	19 634	63	6 987,6	50,67	9 061,2	3 258
19	2 101,5	105,28	2 140,8	18 528	64	7 099,1	48,93	9 310,3	3 119
20	2 212,2	104,63	2 258,2	17 529	65	7 210,6	47,17	9 568,6	2 982
21	2 322,9	103,96	2 376,3	16 621	66	7 322,1	45,40	9 836,7	2 847
22	2 433,6	103,25	2 495,3	15 792	67	7 433,6	43,61	10 115,6	2 715
23	2 544,3	102,51	2 615,1	15 032	68	7 545,1	41,82	10 406,2	2 584
24	2 655,0	101,74	2 735,8	14 332	69	7 656,6	40,01	10 709,7	2 455
25	2 765,8	100,94	2 857,4	13 685	70	7 768,1	38,18	11 027,3	2 328
26	2 876,6	100,11	2 980,1	13 084	71	7 879,7	36,35	11 360,6	2 202
27	2 987,3	99,24	3 103,8	12 525	72	7 991,3	34,50	11 711,3	2 078
28	3 098,1	98,35	3 228,6	12 003	73	8 102,8	32,64	12 081,3	1 956
29	3 209,0	97,43	3 354,6	11 514	74	8 214,4	30,78	12 473,1	1 834
30	3 319,8	96,47	3 481,8	11 055	75	8 326,0	28,90	12 889,6	1 714
31	3 430,6	95,49	3 610,4	10 623	76	8 437,6	27,01	13 334,1	1 595
32	3 541,5	94,48	3 740,3	10 216	77	8 549,3	25,12	13 810,9	1 477
33	3 652,4	93,44	3 871,6	9 830	78	8 660,9	23,22	14 325,3	1 360
34	3 763,3	92,37	4 004,5	9 465	79	8 772,5	21,31	14 883,8	1 244
35	3 874,2	91,28	4 139,0	9 118	80	8 884,2	19,39	15 494,9	1 128
36	3 985,1	90,15	4 275,1	8 788	81	8 995,8	17,47	16 169,8	1 013
37	4 096,1	89,00	4 413,0	8 473	82	9 107,5	15,54	16 923,6	899
38	4 207,1	87,82	4 552,7	8 173	83	9 219,1	13,61	17 777,5	786
39	4 318,1	86,62	4 694,3	7 886	84	9 330,8	11,67	18 762,6	673
40	4 429,1	85,38	4 838,0	7 611	85	9 442,5	9,73	19 927,1	560
41	4 540,1	84,13	4 983,8	7 347	86	9 554,1	7,79	21 351,5	447
42	4 651,2	82,84	5 131,9	7 093	87	9 665,8	5,84	23 187,3	335
43	4 762,2	81,53	5 282,3	6 850	88	9 777,5	3,90	25 773,9	223
44	4 873,3	80,20	5 435,2	6 615	89	9 889,2	1,95	30 194,8	112
45	4 984,4	78,84	5 590,7	6 388	90	10 000,9	0	∞	0

Man beginnt nun mit der Berechnung der x' und y' für den dem Mittelmeridian zunächstliegenden Meridian, für den $\lambda' = m^0$ sei. Angenommen es seien 4 Parallelkreise nördlich, 4 südlich vom Mittelparallel zu ziehen. Die Koordinaten der Schnittpunkte des betrachteten Meridians mit denselben sollen durch Indices unterschieden werden. Man hat dann mittels der Logarithmentafel folgende Werte zu berechnen, die man am übersichtlichsten in folgender Weise tabellarisch zusammenstellt:

$$\left.\begin{array}{lll} 4^{\text{ter}} & \text{oberer Parallel} & x'_4 \\ 3^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & x'_3 \\ 2^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & x'_2 \\ 1^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & x'_1 \\ & \text{Mittelparallel} & x'_0 \\ 1^{\text{ter}} & \text{unterer Parallel} & x'_{-1} \\ 2^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & x'_{-2} \\ 3^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & x'_{-3} \\ 4^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & x'_{-4} \end{array}\right\} = \sin m \left\{\begin{array}{l} (R_0 - 4b) = \cdots \\ (R_0 - 3b) = \cdots \\ (R_0 - 2b) = \cdots \\ (R_0 - b) = \cdots \\ R_0 \qquad\quad\; = \cdots \\ (R_0 + b) = \cdots \\ (R_0 + 2b) = \cdots \\ (R_0 + 3b) = \cdots \\ (R_0 + 4b) = \cdots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} 4^{\text{ter}} & \text{oberer Parallel} & y'_4 \\ 3^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & y'_3 \\ 2^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & y'_2 \\ 1^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & y'_1 \\ & \text{Mittelparallel} & y'_0 \\ 1^{\text{ter}} & \text{unterer Parallel} & y'_{-1} \\ 2^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & y'_{-2} \\ 3^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & y'_{-3} \\ 4^{\text{ter}} & \;\;\text{"}\qquad\text{"} & y'_{-4} \end{array}\right\} = 2 \sin^2 \frac{m}{2} \left\{\begin{array}{l} (R_0 - 4b) + 4b = \cdots \\ (R_0 - 3b) + 3b = \cdots \\ (R_0 - 2b) + 2b = \cdots \\ (R_0 - b) + b = \cdots \\ R_0 \qquad\qquad\qquad = \cdots \\ (R_0 + b) - b = \cdots \\ (R_0 + 2b) - 2b = \cdots \\ (R_0 + 3b) - 3b = \cdots \\ (R_0 + 4b) - 4b = \cdots \end{array}\right.$$

Man geht dann über zur Bestimmung der auf dem nächstfolgenden Meridian gelegenen Durchschnittspunkte mittels ihrer Koordinaten x'', y'', die man in gleicher Tabelle zusammenschreibt. Sie unterscheidet sich von voriger nur dadurch, dafs jetzt überall $\lambda' = 2m^0$ zu setzen ist. Ebenso erhält man die Koordinaten x''', y''' der auf dem dritten Meridian gelegenen Durchschnittspunkte, indem man $\lambda' = 3m$ setzt u. s. w. Die Rechnung geht ferner sehr rasch, weil man die Logarithmen der Faktoren

$$(R_0 - 4b), \quad (R_0 - 3b), \ldots (R_0 + 4b)$$

ein für allemal aufgeschlagen hat*).

*) Wollte man sehr genau verfahren, so hätte man nicht die Multipla b, $2b$, $3b$, $4b$ ... in den Formeln einzuführen, sondern die Summen

$$b_1,\; b_1 + b_2,\; b_1 + b_2 + b_3, \ldots,$$

Bei der **Auftragung** der Koordinaten vollendet man auch am besten diejenige eines Meridians, ehe man zum nächsten übergeht. Man trägt erst die y auf dem Mittelmeridian auf, zieht durch die Teilpunkte Senkrechte dazu und trägt nun die x jedesmal links und rechts auf, so erhält man gleichzeitig zwei symmetrisch gelegene Meridiane. Übrigens braucht man die Abscissen nur für 2 Parallelen, z. B. für den obersten und den untersten, aufzutragen, denn die durch beide Punkte gelegte Gerade ist ja der Meridian und ihre Durchschnittspunkte mit den gezogenen Senkrechten sind die Parallelkreisdurchschnitte.

Liegt das Netz unsymmetrisch zum Mittelmeridian, so sind die aufeinanderfolgenden Werte von λ' etwas andere. Ist die Längendifferenz des Mittelmeridians gegen den ersten einzuzeichnenden zur Linken $= p$, also für den ersten zur Rechten $= m - p$, so erhält man die Koordinaten für den ersten, zweiten, dritten ... Meridian, indem man in obiger Tabelle einsetzt:

statt	m ,	$2m$,	$3m$,	$4m$,
für linke Meridiane	p ,	$m + p$,	$2m + p$,	$3m + p$,
„ rechte „	$m - p$,	$2m - p$,	$3m - p$,	$4m - p$.

Gehört der Mittelparallel nicht zu den einzuzeichnenden, so hat man, wenn der Abstand des nächst nördlicheren einzuzeichnenden Parallels $= a$ ist, überall $(R_0 - a)$ statt R_0 zu benutzen; auch ist jedem y noch der Summand $+ a$ beizufügen, wenn man nicht vorzieht die Abscissenachse um a nach Norden zu verschieben, was einfacher ist.

Die Kegelprojektion ist trotz der rechtwinkligen Kreuzung von Meridianen und Parallelen nicht winkeltreu, sie ist aber für Länder, die von Nord nach Süd nicht zu ausgedehnt sind, trotzdem zu empfehlen, weil sie bei leichter Konstruktion nur mäfsige Verzerrungen ergiebt. Die Verzerrungen ergeben sich daraus, dafs, während die Dimensionen in der Richtung der Meridiane die wahren bleiben, die Parallelkreisbogen je weiter vom Mittelparallel um so mehr vergröfsert werden. Der blofse Anblick der Fig. 71 lehrt, dafs der durch B' gehende, auf dem Kegelmantel liegende Kreis gröfser ist als der durch B gehende Parallelkreis, dessen Bild er ist. Dasselbe gilt für jeden südlich von der Mitte liegenden Parallel. Der Fehler wächst mit der Breitendifferenz gegen die Mittelbreite. Das Bestreben diesen Fehler zu verringern hat zu mehreren Abänderungen der gewöhnlichen Kegelprojektion geführt.

---

weil wegen der ellipsoidischen Erdgestalt die aufeinanderfolgenden Meridiangrade etwas verschiedene Längen haben. Praktisch wird der Fehler selten bemerkbar sein.

2. Bei der sogenannten **De l'Isle'schen Projektion** (die aber schon von Merkator vorgeschlagen worden ist) sucht man die Verzerrung dadurch zu verringern, dafs man 2 Parallelkreise der Kugel zur Koinzidenz mit ihren Bildern bringt. Statt nämlich auf einen im Mittelparallel berührenden Kegel zu projizieren, legt man den Kegel durch 2 Parallelkreise des Gebietes, so dafs er also die Kugel schneidet. Erstreckt sich das darzustellende Gebiet z. B. von A bis B, so legt man den Kegel durch die Parallelkreise der Punkte M und P, welche je um ein Viertel der ganzen Bogenlänge AB von den Grenzparallelen des Gebietes abstehen. Es ist leicht, auch hier den Radius zu berechnen, womit für die abgewickelte Karte die Parallelkreisbögen durch M und P zu ziehen sind. Auf ihnen werden dann die Grade in ihrer richtigen Länge aufgetragen. Man sieht, dafs jedenfalls der durch die Mitte Q gehende Parallelkreis etwas verkleinert auf den Kegel übertragen wird, allein die dem Rand naheliegenden Parallelen werden dafür weniger vergröfsert als bei Abbildung auf den Berührungskegel. Die Verzerrung, welche bei der gewöhnlichen Kegelprojektion die Randteile allein traf, wird hier teilweise auf die Mitte geworfen, ist dafür aber nirgends so bedeutend wie dort. Verschiedene Mathematiker, wie Euler, Murdoch u. a. m. haben Vorschriften darüber gegeben, wie man die Parallelen M und P so wählt, dafs die Verzerrung eine möglichst geringe und möglichst gleichförmig verteilt wird.

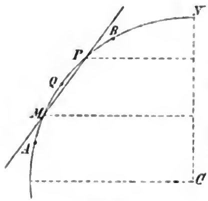


Fig. 71.

3. Auch eine äquivalente Kegelprojektion liefse sich auf den Berührungskegel im Mittelparallel ausführen, allein dieselbe würde des Vorteils entbehren, dafs auf diesem Parallel die Längengrade im richtigen Verhältnis zu den Breitegraden abgebildet werden. Stellt man diese letztere Forderung, so kommt man auf **Lamberts äquivalente Kegelprojektion,** wobei nicht auf einen Berührungs- sondern auf einen Schnittkegel KK' (Fig. 75) abgebildet wird. Der Parallelkreisbogen zur Breite β wird, falls α wieder die Mittelbreite bezeichnet, mit dem Radius

$$R = 2r\,\frac{\sin(45^0 - \frac{1}{2}\beta)}{\cos(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)}$$

gezogen. Da nach bekannten Formeln der Goniometrie

$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{1-\sin\beta}{2}}, \quad \cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}},$$

so kann man obige Formel auch schreiben:

$$R = 2r\sqrt{\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\alpha}},$$

und aus dieser Form läfst sich leicht zeigen, dafs die Projektion in der That äquivalent ist. Der Flächeninhalt Z einer Kugelzone zwischen den Breiten β und β' ist gleich der Höhe $EF = h$ der Zone, multipliziert mit der Länge des gröfsten Kugelkreises, also $= 2r\pi h$ Nun ist aber:

$$EF = CF - CE = r\sin\beta' - r\sin\beta,$$

folglich:

$$Z = 2r^2\pi\,(\sin\beta' - \sin\beta).$$

Der Wert von $\sin\beta$ ergiebt sich aus dem quadrierten vorstehenden Wert von R zu:

$$4r^2\sin\beta = 4r^2 - R^2\,(1+\sin\alpha).$$

Nennt man R' den Radius für das Bild des Parallelkreises β', so wird ebenso:

$$4r^2\sin\beta' = 4r^2 - R'^2(1+\sin\alpha).$$

Man erhält also:

$$Z = 2r^2\pi\,(\sin\beta' - \sin\beta) = \frac{1+\sin\alpha}{2}\,(R^2 - R'^2)\,.\,\pi\,.$$

Die entsprechende Fläche der Karte ist die Differenz zwischen den

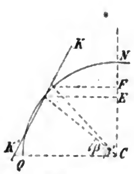


Fig. 75.

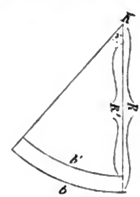


Fig. 76.

beiden Kreissektoren von den Radien R und R', die beide demselben Winkel ν zugehören. Die Fläche eines Kreissektors, dessen Bogen b ist, hat den Wert $\frac{bR}{2}$; b selbst aber folgt aus der Proportion:

$$b : 2R\pi = \nu^0 : 360^0,$$

also:

$$b = \frac{2R\pi\nu}{360},$$

ebenso:

$$b' = \frac{2R'\pi\nu}{360}.$$

Demnach ist die Fläche zwischen b und b':

$$\frac{bR}{2} - \frac{b'R'}{2} = \frac{\pi\nu}{360}(R^2 - R'^2).$$

Die Fläche ist in der That der Zonenfläche Z gleich, wenn man nur den Winkel ν so wählt, dafs:

$$\frac{\nu}{360} = \frac{1 + \sin\alpha}{2}$$

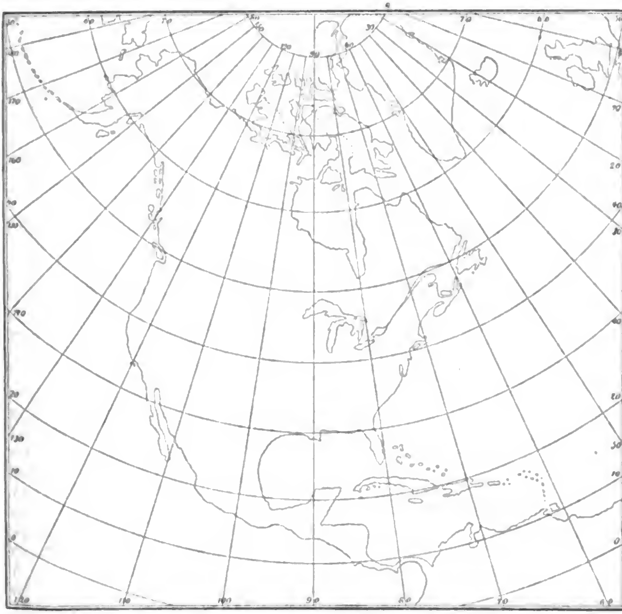


Fig. 77. Nordamerika in Lamberts flächentreuer Kegelprojektion.

wird. Hierdurch wird also nur die Öffnung des Kegels näher bestimmt.

Die Konstruktion erfolgt am besten, indem man die Werte von R für die einzuzeichnenden Parallelkreise berechnet, sie dann in dem betreffenden Mafsstabe in den Zirkel nimmt und die Parallelkreise auszieht. Auf dem Mittelparallel, dessen Radius $= 2r \operatorname{tg}(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)$ wird, müssen die Parallelgrade in ihrer wahren, nur mit dem Mafs-

stab multiplizierten Länge aufgetragen werden. Man kann aber auch Koordinaten mittels der Formeln von S. 84 berechnen, wobei nur zu beachten ist, dafs der Winkel λ' an der Kegelspitze für jeden Längengrad um den 360sten Teil des zuvor bestimmten Winkels ν, also jedesmal um $\frac{1}{2}(1 + \sin \alpha)^0$ wächst. Zur Koordinatenberechnung sind also in die Formeln:

$$x = R \sin \lambda', \qquad y = R_0 - R \cos \lambda',$$

statt λ' die Multipla vorstehender Gröfse einzusetzen.

Fig. 77 giebt in Lamberts äquivalenter Kegelprojektion ein Netz für Nordamerika im Mafsstabe von 1 : 80 Millionen.

Für diese zur Darstellung von Nordamerika ganz besonders geeignete, aber auch sonst sehr empfehlenswerte Abbildungsart folgt hier eine Tabelle für die Radiuslängen der Parallelkreise von 5 zu 5° bei verschiedener Lage des Mittelparallels. Die Verzerrungen steigen zwar bedeutend, wenn man das Bild über den Äquator ausdehnt, trotzdem ist die Tabelle noch 15° über diesen fortgeführt, um die Darstellung von Südamerika (15° N. Br. bis 55° S. Br.) zu ermöglichen.

Tabelle der Parallelkreisradien zur flächentreuen Kegelprojektion für den Kugelradius 100.

Breite	Wenn der Mittelparallel ist:											
	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
85°							9,84	9,62	9,44	9,28	9,13	9,03
80							19,65	19,23	18,87	18,55	18,28	18,05
75						30,14	29,43	28,80	28,26	27,78	27,37	27,03
70						40,11	39,15	38,31	37,59	36,96	36,41	35,95
65					51,33	49,98	48,79	47,75	46,85	46,06	45,38	44,81
60					61,38	59,77	58,35	56,98	56,03	55,08	54,28	53,59
55				73,40	71,31	69,44	67,79	66,34	65,08	63,98	63,06	62,26
50				83,50	81,12	79,00	77,12	75,47	74,04	72,80	71,73	70,82
45			96,45	93,42	90,74	88,37	86,28	84,43	82,83	81,43	80,24	79,23
40			106,5	103,1	100,2	97,59	95,28	93,24	91,48	89,93	88,61	87,50
35		120,5	116,4	112,7	109,5	106,7	104,1	101,9	99,95	98,26	96,83	95,61
30		130,5	126,0	122,1	118,6	115,5	112,7	110,3	108,2	106,4	104,9	103,5
25	145,7	140,3	135,4	131,1	127,5	124,1	121,2	118,6	116,3	114,3	112,7	
20	155,6	149,7	144,5	140,1	136,0	132,4	129,3	126,6	124,2	122,1	120,3	
15	165,1	158,9	153,5	148,6	144,3	140,6	137,2	134,3	131,7	129,5		
10	174,4	167,8	162,0	156,9	152,4	148,5	145,0	141,8	139,2	136,8		
5	183,2	176,4	170,3	164,9	160,2	156,1	152,3	149,1	146,2			
0	191,9	184,6	178,2	172,6	167,7	163,3	159,4	156,1	153,1			
— 5	200,0	192,4	185,8	180,0	174,8	170,2	166,2	162,7				
— 10	207,9	200,0	193,1	187,1	181,7	176,9	172,8	169,0				
— 15	215,3	207,1	200,0	193,6	188,1	183,2	178,9					

4. Auch eine **konforme Kegelprojektion** ist von Lambert angegeben und später namentlich von Gaufs empfohlen worden, weshalb sie auch öfters des Letzteren Namen führt. Die Winkel, welche hierbei die Meridianbilder miteinander einschliefsen, sind das μfache der wahren Längendifferenzen, und der Radius für das Bild des Parallelkreises β wird:

$$R = c \operatorname{tg}^{\mu}(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta),$$

wo c nur vom Mafsstab der Karte abhängt. Die Gröfse μ kann so bestimmt werden, dafs auf 2 Parallelkreisen β_1 und β_2 das Verhältnis der Längengrade auf der Karte und der Kugel denselben Wert hat. Bezeichnet man die Komplemente auf 90^0 der Breiten mit γ_1 und γ_2, also:

$$90 - \beta_1 = \gamma_1, \qquad 90 - \beta_2 = \gamma_2,$$

so wird bei dieser Bestimmungsweise:

$$\mu = \frac{\log \sin \gamma_1 - \log \sin \gamma_2}{\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma_1 - \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma_2},$$

was immer ein echter Bruch ist.

Die Projektion geschieht in diesem Falle auf einen Kegel, der die Kugel in den Parallelkreisen β_1 und β_2 schneidet. — Der Wert von c ergiebt sich, wenn man die wahre Länge eines Parallelgrades von der Breite β mit der Abbildung vergleicht. Der wahre Wert des Grades ist:

$$g = \frac{2 r \pi \cos \beta}{360^0}.$$

In der Abbildung ist der Meridianwinkel nach der Voraussetzung $= \mu \,.\, 1^0 = \mu^0$; der auf dem Kreis vom Radius R zugehörige Bogen g findet sich aus der Proportion:

$$g : 2R\pi = \mu : 360^0,$$

Setzt man die beiden Werte von g einander gleich und setzt dann für R seinen Wert ein, so erhält man:

$$r \cos \beta = R\mu = c\mu \operatorname{tg}^{\mu}(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)$$

oder:

$$c = \frac{r \cos \beta}{\mu \operatorname{tg}^{\mu}(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)}.$$

Soll der Mafsstab auf dem β^{ten} Parallelkreis $= \frac{1}{n}$ sein, so hat man c noch mit $\frac{1}{n}$ zu multiplizieren um diejenige Konstante zu erhalten, welche zur Berechnung des in den Zirkel zu nehmenden Radius R nötig ist. Hat man so die R und die Meridianwinkel

$$\mu, 2\mu, 3\mu \ldots,$$

so kann man auch wieder nach den schon bekannten Formeln Koordinaten berechnen.

Für die Abbildung des Ellipsoids werden natürlich bei dieser wie bei der vorhergehenden Projektion Korrektionsglieder nötig, die den Formeln eine verwickeltere Gestalt geben.

Diese Projektion findet man in russischen Karten vielfach angewandt.

B. Modifizierte Kegelprojektionen.

1. Die **Bonnesche Projektion** ist eine Abbildung auf den Berührungskegel im Mittelpunkt, wobei die Parallelkreiskurven wie bei der gewöhnlichen Kegelprojektion erhalten werden. Um aber die Vergröfserung in der Abbildung der Parallelgrade zu vermeiden, werden diese vom Mittelmeridian aus zu beiden Seiten auf jedem Parallelkreis in ihrer wahren Gröfse aufgetragen und die Teilpunkte durch stetige Kurven verbunden. Das Bild besteht demnach aus kreisbogenförmigen Parallelen und Meridiankurven höherer Ordnung.

Die Auftragung ist also geometrisch sehr einfach. Nachdem man mittels der fünften Kolumne der Tabelle S. 86 (oder der ausführlicheren Tafel *V* im Geogr. Jahrb. Bd. III. S. XLIV) den Radius des Mittelparallels gefunden, zieht man letzteren ($P_0 P_0$) und trägt auf dem Mittelmeridian *PK* die Meridianabschnitte b_1, b_2, b_3 ... nach der zweiten Kolumne jener Tabelle auf. Durch die Teilpunkte zieht man von demselben Mittelpunkte *K* aus die Parallelkreise:

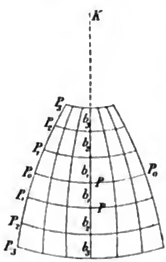


Fig. 78. Bonnesche Projektion.

$$P_1, P_2, P_3 \ldots ; P_{-1}, P_{-2} \ldots .$$

Auf jedem dieser Bogen trägt man nun die Längen der Parallelkreisabschnitte auf, wie sie sich aus der dritten Kolumne der Tafel S. 86 (ausgezogen aus der Tabelle S. XXXIV des genannten Jahrbuchs) ergeben. Die dort angegebenen Meterzahlen hat man nur noch durch die Verjüngungszahl *n* zu dividieren, um, in Metern ausgedrückt, die auf jedem Bogen *P* aufzutragenden Bogenabschnitte von je 1^0 zu erhalten.

Sollen um q^0 abständige Meridiane eingezeichnet werden, wo *q* auch ein Bruch sein kann, so sind die erhaltenen Zahlen noch mit *q* zu multiplizieren, ehe sie aufgetragen werden. Auch die Koordinatenberechnung ist hier nicht wesentlich anders als bei der gewöhnlichen Kegelprojektion. Um die Koordinaten *x*, *y* eines Punktes *A*

zu berechnen, der um eine Breitendifferenz $(\beta - \alpha)$, oder einen Bogen b nördlich vom Mittelparallel PP' liegt, hat man nur zu beachten, daſs hier zu dem Bogen BD ein anderer Winkel ϑ gehört als zu dem auf dem Meridian gelegenen Punkte A des Mittelparallels, der wie früher mit λ' bezeichnet ist. Mittels des Winkels ϑ aber ergeben sich wie früher:

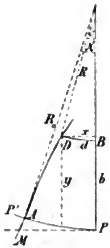


Fig. 79.

$$x = R \sin \vartheta = (R_0 - b) \sin \vartheta ,$$

$$y = R_0 - R \cos \vartheta = b + 2(R_0 - b) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot$$

Den Winkel ϑ erhält man hier mittels der aus der Tabelle S. 86 zu entnehmenden Parallelgradlänge $BD = d$, denn man hat die Proportion:

$$\vartheta : 360^0 = d : 2(R_0 - b)\pi .$$

Man hat also zunächst für die verschiedenen einzuzeichnenden Parallelkreise die ϑ zu berechnen. Für den Mittelparallel ist $\vartheta = \lambda'$, man erhält also eine Wertreihe:

$$\ldots \vartheta_4, \vartheta_3, \vartheta_2, \vartheta_1, \lambda', \vartheta_{-1}, \vartheta_{-2}, \vartheta_{-3}, \vartheta_{-4} \ldots$$

Die weitere Rechnung geht dann nach dem Schema von S. 87, nur daſs der Faktor $\sin m$ hier bei jeder Gleichung ein anderes Winkelargument hat, nämlich:

$$x'_4 = \sin \vartheta_4 (R_0 - 4b) = \cdots \qquad y'_4 = 2 \sin^2 \frac{\vartheta_4}{2} (R_0 - 4b) + 4b = \cdots$$

$$x'_3 = \sin \vartheta_3 (R_0 - 3b) = \cdots \qquad y'_3 = 2 \sin^2 \frac{\vartheta_3}{2} (R_0 - 3b) + 3b = \cdots$$

. . . .

Für die Koordinaten der Punkte des zweiten, dritten, ... Meridians hat man dann überall 2ϑ, 3ϑ, ... statt ϑ zu setzen.

Die Bonnesche Projektion ergiebt, namentlich in den Ecken der Karte, beträchtliche Winkelverzerrungen, wie schon der Anblick des Netzes lehrt. Was ihr trotzdem, neben der leichten Konstruktion, zu unverdienter Beliebtheit bei den Kartographen verholfen hat, ist ihre Eigenschaft, eine äquivalente Abbildung zu sein. Daſs sie dies ist, folgt aus der Betrachtung irgend eines Netzvierecks, dessen Seiten so klein sind, daſs sie als gerade Linien betrachtet werden können. Ein solches Viereck ist auf der Kugel ein symmetrisches Paralleltrapez, dessen beiden Parallelseiten Stücke von Parallelkreisen sind, während die beiden anderen Seiten Stücke von Meridianen sind. Man kann z. B. annehmen, daſs die Breitendifferenz der ersteren und die Längendifferenz der letzteren je 1″ betrage. Das Bild dieses Vierecks in der Karte ist im allgemeinen ein verschobenes Paralleltrapez, denn die Parallelkreise werden als konzentrische, also überall gleich abständige Kreise abgebildet,

die Meridiane als konvergierende Kurven. (Vgl. Fig. 69 S. 79.) Da überdies die Parallelgrade, also die beiden Parallelseiten, und die Mittelmeridiangrade, d. h. der senkrechte Abstand der Parallelseiten in Urbild und Abbild gleich sind, so sind auch die Inhalte beider Paralleltrapeze einander gleich, denn der Inhalt ist ja gleich der halben Summe der Parallelseiten multipliziert mit der Höhe. Da jeder Flächenraum auf der Kugel sich aus solchen Trapezen zusammensetzen läſst, wenn man ihnen nur die gehörige Kleinheit giebt, so besteht die Flächenäquivalenz für jedes beliebige Gebiet.

Die Bonnesche Projektion ist bisher sehr vielfach angewandt worden, sowohl für Spezialkarten (z. B. ist die topographische Karte von Frankreich in 1 : 80 000 nach ihr entworfen), als auch für gröſsere Gebiete z. B. Kontinente. Die meisten Karten unsrer Atlanten haben diese Projektion. Nach dem, was im dritten Kapitel dargelegt wird, entspricht sie aber den nach dem heutigen Stande der Wissenschaft zu stellenden Forderungen keineswegs und wird hoffentlich bald für immer verlassen werden.

2. Die **polykonische Projektion** ist eine bei dem Coast Survey (Küstenvermessung) der Vereinigten Staaten stark benutzte Abän-

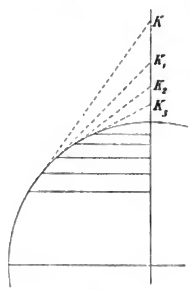


Fig. 80.

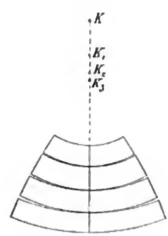


Fig. 81.

derung der gewöhnlichen Kegelprojektion. Denkt man sich das darzustellende Gebiet durch Parallelkreise in schmale Zonen zerteilt und jede derselben auf denjenigen Kegel abgebildet, der sie im Mittelparallel berührt, so erhält man zunächst eine Abbildung auf ein System von Kegelstümpfen, deren Spitzen in K, K_1, K_2, K_3 ... liegen würden und wovon immer die Basis des einen die obere Fläche des nächsten bildet. Schlitzt man alle durch einen Meridianschnitt auf und wickelt sie ab, so treten die Mantelstücke, wenn sie sich im Mittelmeridian berühren, gegen ihre Enden hin immer weiter aus-

einander (Fig. 81), geben also keine zusammenhängende Abbildung des Kugelgebietes. Nimmt man aber die Streifen sehr schmal, z. B. 1″ breit, so klaffen dieselben nach der Abwickelung nicht mehr merklich. Man erhält eine zusammenhängende Bildfläche, wenn man die Abbildungsregel so ausspricht: Um einen Punkt von der geographischen Breite β und der Längendifferenz λ gegen den Mittelmeridian abzubilden, ziehe man einen Kreisbogen, dessen Radius die Seite desjenigen Kegels ist, der die Kugel im Parallelkreis β berührt. Auf diesem Bogen trage man dann vom Mittelmeridian aus den der Längendifferenz λ entsprechenden Parallelkreisbogen auf; sein Endpunkt ist der gesuchte Bildpunkt. Die verschiedenen Parallelkreise durchschneiden den Mittelmeridian in ihren wahren Bogenentfernungen. Der Mittelparallel spielt hier keine Rolle mehr. Hat man ein Gebiet zwischen den Breiten β_1 und β_n darzustellen und sollen die Parallelen $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_n$ in den Entwurf aufgenommen werden, so beginnt man mit der Zeichnung des Mittelmeridians, auf dem man die Meridianbogenlängen aus der zweiten Kolumne der Tabelle S. 86 von β_1 bis β_n in der gewünschten Verjüngung aufträgt. Die fünfte Kolumne giebt dann die Radiuslänge für den durch jeden Teilpunkt zu legenden Parallelkreisbogen. Die Mittelpunkte dieser Kreise fallen hier natürlich an verschiedene Stellen des Mittelmeridians, denn die Spitzen der Kegel (Fig. 80) fallen dem Pol immer näher, je höher die geographische Breite der zugehörigen Zone wird. Die dritte Kolumne der Tabelle S. 86 liefert dann die Länge der auf jedem Kreisbogen aufzutragenden Parallelgrade.

Die rechtwinkligen Koordinaten x und y eines Punktes D (Fig. 79) bezogen auf den zu seinem Parallelkreis gehörigen Mittelmeridianschnittpunkt B als Ursprung erhält man durch die Formeln:

$$x = R \sin \vartheta, \qquad y = R(1 - \cos \vartheta) = 2R \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Der Winkel ϑ wird aber hier durch die Längendifferenz λ und die Breite β gerade so bestimmt wie S. 83 λ' aus λ und α gefunden wurde, d. h. es ist hier:

$$\vartheta = \lambda \sin \beta.$$

Der Winkel ϑ kann deshalb aus der Tabelle *VII B* des Geogr. Jahrbuchs III, S. XLVIII, entnommen werden.

Wenn der Mittelmeridian eingeteilt ist, zieht man durch jeden Teilpunkt eine Senkrechte zu ihm, trägt darauf links und rechts die Abscissen x auf und errichtet in deren Endpunkten die Ordinaten y.

Sehr umfangreiche Tabellen der ausgerechneten Koordinaten enthalten die Projektion tables of the U. S. Navy, herausgegeben vom

Bureau of navigation, Washington 1869. Tabellen von ähnlicher Anwendbarkeit für die gewöhnliche Kegelprojektion zu berechnen wäre unmöglich, weil hierbei die Koordinaten von 3 Argumenten β, λ und der Breite α des Mittelparallels abhängen, während sie bei der polykonischen nur von β und λ abhängen.

Fig. 82 giebt ein Netz für Südamerika in der polykonischen Projektion. Man ersieht daraus, dafs die Auseinanderzerrung, welche

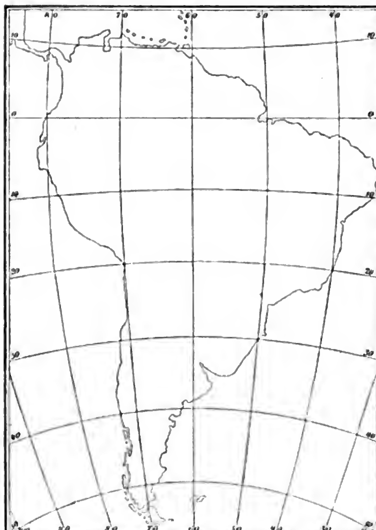


Fig. 82. Südamerika in polykonischer Projektion, 1 : 80 Mill.

bei der gewöhnlichen Kegelprojektion die äufseren Parallelkreise betrifft, hier auf die entfernteren Meridiane fällt. Die polykonische Projektion hat deshalb vor der Kegelprojektion nur für die Darstellung vorwiegend meridional ausgedehnter Gebiete wirkliche Vorzüge.

3. Als **orthogonale polykonische Projektion** bezeichnet man zweckmäfsig die leichte Abänderung der vorigen, welche im englischen Kriegsministerium (War office) für die Darstellung gröfserer Teile der Erdoberfläche benutzt wird.

Die Parallelkreise werden wie oben aufgetragen; um aber die dort fehlende Rechtwinkligkeit der Meridiane gegen die Parallelkreise

herzustellen, wird die Auftragung der Parallelgrade im richtigen Verhältnis aufgegeben. Nur längs dem Äquator werden die Grade richtig aufgetragen und durch die Teilpunkte Kurven gelegt, die alle Parallelkreise orthogonal schneiden. Die geometrische Konstruktion der Durchschnittspunkte erfolgt, nachdem der Mittelmeridian MP richtig eingeteilt ist, in höchst einfacher Weise. Um einen Parallelkreispunkt zu finden, dessen Längendifferenz gegen den Mittelmeridian $= \lambda$ ist, hat man in dem Mittelmeridianpunkt desselben Parallels eine Senkrechte von der halben Länge des betreffenden Parallelkreisbogens zu errichten, also $PT = \frac{1}{2} r \lambda \cos \beta$, und von deren Endpunkt aus mit derselben Länge TB in den Parallelkreis einzuschneiden, so erhält man den gewünschten Punkt B. Der Beweis dieser Konstruktion ist nicht ohne Hilfe höherer Mathematik zu führen und wird deshalb hier übergangen*). Das Netzbild unterscheidet sich nur wenig von dem der gewöhnlichen polykonischen Projektion.

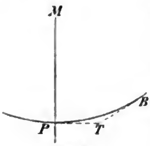


Fig. 83.

4. Die **preufsische Polyederprojektion.** Die Generalstabskarte von Preufsen im Mafsstab von 1 : 100 000, die jetzt zu einer solchen des deutschen Reiches erweitert wird, und nach ihr die neue Spezialkarte der österreichisch-ungarischen Monarchie in 1 : 75 000 werden als Gradabteilungskarten entworfen; d. h. man denkt sich das darzustellende Gebiet durch Meridiane und Parallelkreise in so kleine Trapeze geteilt, dafs die Abbildung eines derselben in dem gewählten Mafsstabe auf einem handlichen Papierformat Platz findet. Bei den erwähnten Karten sind die Trapeze solche von 30′ geographischer Längendifferenz und 15′ Breitendifferenz; die Mefstisch-Aufnahmeblätter in 1 : 25 000 sind von 10′ Längen- und 6′ Breitendifferenz. In beiden Mafsstäben sind die Trapeze so klein, dafs sie als ebene Vierecke angesehen, bez. mit einer durch ihre 4 Eckpunkte gelegten Ebene zusammenfallend betrachtet werden können. Man kann sich die Punkte von der schwach gewölbten Fläche auf die Ebene etwa durch kurze Perpendikel übertragen denken. Handelt es sich um ein grofses Land, das aus sehr vielen solchen Trapezen zusammengesetzt wird, so erhält man eigentlich eine Projektion auf das Polyeder, welches von den durch sämtliche Netzschnittpunkte gelegten Ebenen begrenzt ist; woher der Name. Dabei verzichtet man streng genommen auf das genaue Aneinanderpassen der Blätter, und man kann in der

*) Die ausführliche Entwickelung findet sich im Journal of the R. Geogr. Society Vol. XXX p. 106 (1860).

That das ganze Land nicht als ebene Abbildung aus den Sektionen zusammensetzen. Allein, wo es sich nur um eine beschränkte Zahl von Nachbarsektionen handelt, da sind die Abweichungen der Begrenzungslinien der Blätter so gering, dafs sie von den zufälligen Unregelmäfsigkeiten in der Zusammenziehung des Papiers beim Druck weit übertroffen werden und ein Aneinanderpassen von 4, 9 oder selbst noch mehr Blättern keine Schwierigkeit hat. Am besten fafst man die Projektion als eine gewöhnliche konische auf, entweder auf einen im Mittelparallel berührenden oder auf einen in 2 Parallelen des Trapezes schneidenden Kegel; dann lassen sich wenigstens alle Blätter einer Zone mathematisch genau aneinander passen und die Grenzmeridiane werden streng gerade Linien; die Grenzparallelen Kreisbogen. Die Länge dieser Grenzlinien erhält man aus Wagners Tafel im Geogr. Jahrbuch III (1870) S. XXXIII u. XXXIV, verkürzt in der zweiten und dritten Kolumne der Tabelle S. 86, oder aus den für kleinere Intervalle gegebenen von Jordan, in dessen Handbuch der Vermessungskunde II S. 490. Die Tafeln von Wagner, S. XLIV, sowie die fünfte Kolumne obgenannter Tabelle geben auch die Radien der Parallelkreisbogen für diese Projektion.

Da diese Kreisbogen in den genannten Mafsstäben aufserordentlich schwach gekrümmt sind, so kann man sie nicht mittels des Zirkels ziehen, sondern mufs sie mit Koordinaten auftragen. Zu diesem Zwecke kann man sich entweder des auf S. 84 auseinandergesetzten Verfahrens bedienen oder der folgenden ganz allgemein zur Konstruktion flacher Kreise dienlichen. Setzt man:

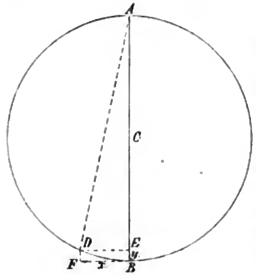


Fig. 84.

$$BE = DF = y, \quad DE = BF = x,$$
$$AC = BC = R,$$

so folgt aus den ähnlichen Dreiecken $BDE (= BDF)$ und ADE:

$$y : x = x : 2R - y.$$

Wenn, wie dies bei Kreisen von so grofsem Radius und bei Betrachtung so kleiner Stücke des Kreises immer der Fall ist, y nur einen sehr kleinen Bruchteil von R bildet, so kann man es neben $2R$ vernachlässigen und:

$$y = \frac{x^2}{2R}$$

setzen, wonach zu einer beliebig gewählten Abscisse x, die von der Mitte des Bogens aus auf der Tangente zu zählen ist, die zugehörige

Ordinate y sich ergiebt. Wenn man diese Rechnung für eine genügende Anzahl von Abscissen (z. B. beiderseits 5) ausführt, so erhält man genügend viele Punkte des Kreisbogens. Wie flach derselbe ist, geht daraus hervor, dafs im Mafsstab von 1 : 100 000 die Ordinaten der Eckpunkte, oder, was dasselbe ist, die Pfeilhöhe des ganzen Grenzkreisbogens nur $0{,}1^{mm}$ beträgt, demnach so gering ist, dafs man die Linien wie gerade ausziehen kann.

In der That werden auch auf den Mefstischblättern der preufsischen Landesvermessung die oberen und unteren Grenzlinien als Geraden ausgezogen und der geringe Einflufs der Krümmung nur bei der Eintragung der trigonometrischen Punkte berücksichtigt*).

*) Vgl. Instruktion f. d. Topographen der K. Preuss. Landes-Aufnahme. Heft I. §. 133 u. 145.

Drittes Kapitel:

Über die Auswahl der Projektion mit geringster Verzerrung.

A. Allgemeine Sätze über Deformation.

Die bisherigen Betrachtungen haben gelehrt, dafs die Beziehungen zwischen Abbild und Urbild mit fast unbeschränkter Willkür festgesetzt werden können. Man kann sie durch perspektivische Projektion oder durch Abwickelung herstellen, man kann Verfügung über die Gestalt bestimmter Kurvensysteme in der Karte treffen, man kann endlich die Deformationen in gewisser Weise beschränken, und kann sogar Bestimmungsweisen verschiedener Gattung mit einander verbinden, sodafs man eine unbegrenzte Zahl von Projektionsarten hat, von denen jede bestimmte Vorteile und bestimmte Nachteile bietet. Bei der Forderung, möglichste Übereinstimmung zwischen Urbild und Abbild zu erzielen, wird man zunächst auf den Versuch geführt, Projektionen zu ersinnen, bei denen die Deformationen (oder Verzerrungen) möglichst gering sind. Hier zeigt sich aber der Übelstand, dafs von den Deformationen der Winkel, Längen und Flächenräume immer nur eine Gattung zum Verschwinden gebracht werden kann, dafs also winkeltreue Projektionen nicht flächentreu noch mittabstandstreu (äquidistant in dem Sinne, dafs die Entfernungen von der Kartenmitte ungeändert bleiben, denn nur in dieser Beschränkung ist Abstandstreue möglich) sein können, äquidistante nicht winkeltreu noch flächentreu und flächentreue nicht winkeltreu noch mittabstandstreu. Für die Herstellung guter Karten ist nun die Frage von höchster Bedeutung, bis zu welchem Grade für bestimmte darzustellende Teile der Erdoberfläche eine Annäherung an die nicht völlig zu erlangende Treue in zwei von den 3 Elementen erreicht werden kann, wenn sie im dritten streng vorhanden ist.

Da bald Winkeltreue, bald Flächentreue, bald endlich, wiewohl seltener, Mittabstandstreue die zu bevorzugende Eigenschaft ist, so wird es sich darum handeln zu untersuchen z. B. bei welcher flächentreuen Projektion des gegebenen Gebietes die gröfste auf der Karte vorkommende Winkelverzerrung möglichst gering ist. Solche Projektionen, deren Winkelverzerrung unter sonst gegebenen Umständen

ein Minimum ist, nennt Tissot **perigonal**; solche, deren Mittabstände möglichst wenig verändert werden, heifsen **perimekoische** (périmécoique) und — wenn entweder Winkeltreue oder Mittabstandstreue die Hauptforderung bildet — solche, deren Flächenänderung möglichst gering ist, **perihalische** (périhalique). Die Beantwortung jener Frage ist erst ermöglicht worden durch die analytischen Untersuchungen von A. Tissot*) über die **allgemeinen Eigenschaften der Deformation** bei Abbildungen einer Oberfläche auf einer anderen. Ganz unabhängig von dem Gesetze, nach welchem die Abbildung ausgeführt wird, nur unter der einzigen Voraussetzung, dafs dieselbe in stetiger Weise geschieht, d. h. dafs jedem Punkte, jeder Linie, jeder Fläche des Urbildes bez. ein Punkt, eine Linie, eine Fläche des Abbildes entspricht (wovon eine Ausnahme in einzelnen Punkten, wie z. B. die Pole, gestattet ist) haben alle Projektionen folgende Eigenschaft:

> Auf der abzubildenden Oberfläche sind an jedem Punkte 2 aufeinander senkrechtstehende Tangentialrichtungen vorhanden, die auch in der Abbildung senkrecht zu einander bleiben; sodafs also (indem man auf der Oberfläche in der Richtung dieser Tangenten von Punkt zu Punkt fortschreitet) auf der Oberfläche ein System von senkrecht sich schneidenden Kurven angegeben werden kann, welches auch als senkrecht sich schneidendes Kurvensystem abgebildet wird.

Ist die Abbildung winkeltreu, so besteht diese Eigenschaft für jedes beliebige über die Urbildfläche gelegte orthogonale Kurvensystem; im allgemeinen giebt es aber nur ein einziges von dieser Eigenschaft. In mehreren der früher besprochenen Projektionen wird z. B. das System der Meridiane und Parallelkreise der Erde (welches ja orthogonal ist, d. h. sich in lauter rechten Winkeln kreuzt) auch durch rechtwinklig sich schneidende Liniensysteme dargestellt, z. B. in den gewöhnlichen Cylinder- und Kegelprojektionen. Hier hat man also ohne weiteres die beiden in jenem Satze gemeinten Richtungen und Liniensysteme. Daraus folgt noch keineswegs die Winkeltreue. In den 3 Projektionen Fig. 66, 67, 68 schneiden sich überall Parallelkreise und Meridiane senkrecht, trotzdem ist unter ihnen nur die Merkatorprojektion winkeltreu. Halbiert man z. B. in jeder der Fi-

*) A. Tissot, Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Paris, Gauthier-Villars 1881. Der wichtigste Teil des Inhalts war bereits in den Nouvelles annales de mathématiques 2me série T. 17, 18, 19 (1878—80) erschienen.

guren zwei rechte Nebenwinkel, so bilden die beiden Halbierungslinien überall auch einen rechten Winkel, dieselben sind aber nur in der Merkatorprojektion die Abbildungen der Winkelhalbierungslinien auf der Kugeloberfläche, in beiden anderen Projektionen sind es Abbildungen von Linien der Erdoberfläche, die nicht die Netzwinkel halbieren und nicht senkrecht aufeinander stehen. Wenn in der Karte die Meridiane und Parallelkreise sich nicht senkrecht schneiden, so ist das orthogonale Liniensystem, das auch orthogonal abgebildet wird, eben nicht das gewöhnliche Kugelnetz, sondern schneidet dieses an jedem Punkt in gewissen Winkeln.

> Denkt man sich um irgend einen Punkt der Oberfläche als Mittelpunkt einen kleinen Kreis gezogen und legt durch denselben Punkt die zwei Richtungen, die bei der Abbildung rechtwinklig bleiben, so besteht die Verzerrung nur darin, dafs diese beiden aufeinander rechtwinkligen Kreisdurchmesser (deren Länge man = 1 setzen kann) in verschiedener Weise verlängert oder verkürzt werden. Die Abbildung des Kreises wird zu einer Ellipse, die man die Indicatrix nennt.

Das Verhältnis ihrer grofsen Halbachse a zur kleinen b bildet die gröfste in ihr vorkommende Verzerrung, weil jeder andere Halbmesser der Ellipse an Gröfse zwischen a und b liegt, $a:b$ also das gröfstmögliche Verhältnis der Bildlängen zweier im Urbild gleichen Durchmesser ist. Durch die Gröfsen a und b läfst sich auch die gröfstmögliche Änderung ausdrücken, welche der Winkel zwischen je 2 Radien des Urkreises bei der Abbildung erfahren kann. Nennt man dieselbe mit Tissot 2ω, so ist ω durch die einfache Formel gegeben:

$$\sin \omega = \frac{a-b}{a+b}.$$

Sowohl das Verhältnis $a:b$, wie auch die bedeutendste Winkeländerung ändern sich von einem Punkte der Karte zum anderen.

Es kann Punkte und Linien geben, wo jenes Verhältnis = 1, d. h. $a = b$ wird, also gar keine Längenverzerrung eintritt, wobei dann auch nach vorstehender Formel die Winkeländerung gleich Null ist; aufserdem hängt aber das Verhältnis $a:b$ und die Winkeländerung ω von dem Gesetze ab, wonach die Projektion stattfindet. Ist überall $a = b$, so ist überall $\omega = 0$, also die Projektion winkeltreu (autogonal nach Tissot), ist $ab = 1$, so ist sie flächentreu, weil dann der Inhalt der Ellipse gleich demjenigen des Kreises im Urbild ist. In nicht flächentreuen Projektionen giebt der Wert $S = ab$ das Vergröfserungs- oder Verkleinerungsverhältnis der Flächen an.

B. Die Abbildungen geringster Deformation.

Ist das Abbildungsgesetz gegeben, so lassen sich daraus nach ganz bestimmten Regeln die Gröfsen a, b und 2ω für jeden Punkt berechnen. Dies hat Tissot für alle bekannten Projektionen ausgeführt und die Resultate in zahlreichen Tabellen zusammengestellt. Mit Hilfe dieser läfst sich nun die Frage lösen, welche Projektionsart für einen gegebenen Fall die geeignetste ist.

Zunächst sind die Projektionen auszusondern, die wegen ganz bestimmter Eigenschaften für besondere Zwecke bevorzugt werden, wie z. B. die Merkatorkarten wegen der Geradlinigkeit der Loxodromen, die gnomonischen Karten wegen der Geradlinigkeit der grofsen Kugelkreise, d. h. der kürzesten Verbindungswege zwischen je 2 Punkten auf der Erdoberfläche, oder endlich die Parallelperspektive zur Darstellung der Mondoberfläche, so wie sie unseren Augen wirklich erscheint. Es soll vielmehr hier nur die Rede von Landkarten sein, von denen man verlangt, dafs sie ein gegebenes Stück der Erdoberfläche mit möglichster Treue, also mit möglichst wenig Verzerrung, wiedergeben sollen, und bei denen kein Grund vorliegt, die Verzerrung in einzelnen Punkten oder Gegenden mehr als in anderen herabzumindern, sondern nur die Absicht ist, die Maximalgrenze, welche die Deformation innerhalb des Gebietes erreichen kann, möglichst herabzudrücken.

1. Nimmt man zunächst an, dafs eine **volle Halbkugel abzubilden** sei, so sind alle cylindrischen und konischen Projektionen auszuschliefsen, bei denen entweder ein Teil der Begrenzungslinien in unendliche Entfernung rückt oder wenigstens bei der Abwickelung Punkte, die auf der Erdoberfläche benachbart sind, in grofse Entfernung von einander gebracht werden. Nach Wegfall dieser Klassen von Projektionen hat man noch die Vorfrage zu entscheiden, ob mehr Gewicht auf die unveränderte Abbildung der Winkel oder Flächen, oder Mittabstände gelegt wird.

a) Handelt es sich darum, die Winkel unverändert zu erhalten und die gröfste Flächenveränderung möglichst zu reduzieren, so steht nur die stereographische Perspektive zur Verfügung, bei welcher allerdings um den Rand der Karte die Flächen auf das Vierfache vergröfsert werden. Indessen giebt es keine andere winkeltreue Projektion, welche dies Verhältnis herabzumindern gestattete.

b) Soll die Abbildung flächentreu sein und dabei die gröfstmögliche Winkelveränderung ein Minimum sein, so entspricht diesen Anforderungen nur Lamberts äquivalente Azimutalprojektion (s. S. 63). Der gröfste vorkommende Wert des Verhältnisses von $a:b$, der mit

(a) bezeichnet werden möge, wird $= 2$, die gröfste Winkelverzerrung $2\omega = 38^0\,57'$.

c) Unter den mittabstandstreuen Projektionen ist **Postels** äquidistante Azimutalprojektion (s. S. 60) diejenige, welche die kleinsten Winkel und Flächenverzerrungen giebt. — Folgende kleine Tabelle giebt die Maximalwerte der Winkel-, Längen- und Flächenveränderung $(2\omega, (a), S)$ bei der Darstellung einer Halbkugel in den 3 genannten Projektionen:

	2ω	(a)	S
Stereographische Projektion	$0^0\;\;0'$	2,000	4,000
Postels äquidistante Azimutalprojektion	$25^0\,39'$	1,571	1,571
Lamberts äquivalente Azimutalprojektion	$38^0\,57'$	2,000	1,000

Die externen Perspektiven, bei denen der Augpunkt weniger als die Länge des Kugelradius von der Oberfläche entfernt angenommen wird, geben Darstellungen, bei denen die maximalen Winkelverzerrungen kleiner als die der Lambert'schen Azimutalprojektion sind, während die gröfsten Flächenänderungen kleiner als bei der stereographischen, die Längenänderungen aber kleiner als bei beiden, jedoch gröfser als bei der Postel'schen sind.

Mit Hilfe von konischen Projektionen kann man aber noch weit bessere Resultate erhalten, nur mufs man dabei auf die geschlossene Form des Umkreises verzichten. Wenn man z. B. die nördliche Halbkugel nach irgend einer echten Kegelprojektion auf einen Kegel, dessen Spitze in der verlängerten Erdachse liegt, abbildet und diesen dann längs einem Meridian aufschlitzt, so ergiebt die Ausbreitung des Kegelmantels auf der Ebene keinen Vollkreis, sondern es mangelt ein Ausschnitt aus demselben.

Ebenso könnte man auf einen Kegel, dessen Spitze auf einem verlängerten Äquatorialradius der Erde liegt, die östliche bez. westliche Halbkugel abbilden. Wenn man die Schlitzlinie längs dem südlichen Meridianquadranten führte, so käme der leere Sektor jedesmal in die minder wichtigen Seeflächen des indischen, bez. des südlichen stillen Ozeans zu liegen. (Man könnte den Sektor übrigens ausfüllen, indem man beiderseits die Karte bis zu seiner Halbierungslinie fortsetzte, wodurch dann ein Gebiet von der Gröfse des Sektors auf der Karte doppelt erscheinen würde, was für die Übersicht des Zusammenhangs in diesen Gegenden sogar von Vorteil sein und den harmonischen Eindruck der Karte minder stören würde als der leere Sektor). Bei der äquivalenten perigonalen Kegelprojektion der Halb-

kugel würde die gröfste Winkelverzerrung nur 19° 45′, die Längenveränderung 1,414 betragen.

2. Handelt es sich nur um einen bedeutenden Teil einer Hemisphäre, um eine **gröfsere Kalotte**, so sind auch hier die azimutalen Projektionen, zu denen ja auch die perspektivischen gehören, die günstigsten; falls man nicht die für das betreffende Gebiet perigonale (d. h. die geringsten Winkelverzerrungen bietende) äquivalente Projektion auf einen Kegel, dessen Achse die Mitte des Gebiets schneidet, in Mitbewerbung stellen will, die eben den leeren Sektor bedingt und meist auch der Symmetrie um einen Mittelmeridian ermangelt, sonst aber die günstigste Abbildung bietet*). Die Maximalverzerrungen hängen natürlich von der Gröfse des darzustellenden Gebietes ab. In nachfolgender Tabelle sind nach Tissot die 3 charakteristischen Gröfsen angegeben für die Abbildung von Kugelkappen von 25°, 40° und 50° Bogenhalbmesser.

	25°-Bereich			40°-Bereich			50°-Bereich		
	2ω	(a)	S	2ω	(a)	S	2ω	(a)	S
Stereographische Projekt.	0° 0′	1,049	1,101	0° 0′	1,132	1,282	0° 0′	1,217	1,482
Äquiv. perigon. Kegelproj.	1° 22′	1,024	1,000	3° 34′	1,064	1,000	5° 38′	1,103	1,000
Postels äquidistante Proj.	1° 50′	1,032	1,032	4° 44′	1,086	1,086	7° 27′	1,139	1,139
Lamberts äquiv. Azim. Proj.	2° 45′	1,049	1,000	7° 7′	1,132	1,000	11° 15′	1,217	1,000

Europa ist in einem Bereich von 25° Radius enthalten, auf seine Darstellung sind also die Zahlen der drei ersten Kolumnen anwendbar. Asien ist in einem 50°-Bereich enthalten, also auf es die letzten 3 Kolumnen anwendbar. Nordamerika und Afrika sind auf einer 40-gradigen und Südamerika auf einer 33-gradigen Kalotte gelegen. Afrika und Südamerika könnten im perigonalen flächentreuen Kegelentwurf so abgebildet werden, dafs der leere Sektor keine Landflächen durchschnitte, indem man nämlich die Kegelachse für Afrika auf den Äquator vor die Gabunmündung, für Südamerika an die West-

*) Die perigonale flächentreue Kegelprojektion hat ein etwas anderes Gesetz als die Lambertsche (s. S. 89). Für sie ist nämlich, falls eine Kalotte um den Pol abgebildet werden soll:

$$R = 2\,r\,\frac{\sin\,(45^\circ - \frac{1}{2}\,\beta)}{\sqrt{\cos\,(45^\circ - \frac{1}{2}\,\beta_0)}}$$

wo β_0 die geographische Breite des Begrenzungsparallels ist. Wird auf einen mit der Erde nicht konaxialen Kegel abgebildet, so treten an die Stelle von $90^\circ - \beta$, bez. $90^\circ - \beta_0$ die Winkelabstände δ, bez. δ_0 vom Mittelpunkt der Kalottenfläche.

küste ungefähr auf den Wendekreis des Steinbocks verlegte und im ersten Falle längs dem Äquator, im zweiten längs einem nach Westen oder Südwesten gehenden gröfsten Kreis aufschlitzte. Die Tabellen zeigen, wie gering die Maximalverzerrungen bei dieser Projektion werden. Bei Asien und Europa ist wegen der notwendigen Zerreifsung der Landflächen diese Projektionsart ausgeschlossen. Auch die konischen Projektionen dieser Kontinente auf mit der Erde konaxiale Kegel, mögen sie flächentreu oder winkeltreu sein, geben ungünstigere Maximaldeformationen, als die in der Tabelle enthaltenen Projektionen. Die Bonne'sche Projektion giebt für die 5 Kontinente folgende Abweichungen:

	2ω	(a)	S
Europa	6° 23′	1,118	1,000
Asien	26° 10′	1,585	1,000
Afrika	12° 28′	1,244	1,000
Nord-Amerika	22° 34′	1,487	1,000
Süd-Amerika	8° 16′	1,155	1,000

Der Vergleich dieser Tabelle mit der vorigen (je für den entsprechenden Bereich) enthält eine wahrhaft vernichtende Kritik der in unsren Atlanten fast ausschliefslich angewandten Bonne'schen Projektion.

3. Wenn durch die vorausgegangenen Betrachtungen die Willkür bei der Wahl einer Projektion für gewöhnliche Atlas- oder Handkarten gröfserer Gebiete schon auf einige wenige Projektionsarten eingeschränkt wird, so läfst sich die Frage nach der **besten Projektion kleinerer Gebiete**, also eines einzelnen Staates oder Landes, wie z. B. von Deutschland, Frankreich, der iberischen Halbinsel mit völliger Bestimmtheit beantworten.

Vorausgeschickt mufs werden, dafs alle Projektionen die Eigenschaft haben, um so geringere Verzerrungen zu geben, einen je kleineren Teil der Kugeloberfläche das abzubildende Gebiet ausmacht; so dafs also auch der Unterschied zwischen den verschiedenen Entwurfsarten immer mehr abnimmt, je kleiner das Gebiet wird, und die Wahl der Projektion immer gleichgültiger wird. Die Wichtigkeit der Wahl nimmt dagegen wieder zu mit dem Mafsstab der Karte und wird von grofser Bedeutung für Spezialkarten, wie z. B. die Generalstabskarten, falls diese ein aus allen Blättern zusammensetzbares ebenes Gesamtbild des Landes geben sollen (was, wie oben auseinandergesetzt, bei den nach der preufsischen Polyederprojektion entworfenen Gradabteilungskarten nicht der Fall ist). Bei dem Neuentwurf des Netzes für eine solche Karte müfste also die Frage nach

der besten Projektionsart gestellt werden und könnte infolge von Tissot's Untersuchungen eindeutig beantwortet werden. Die sich ergebende Projektion ist in keinem Falle eine der bekannten, sondern wird nur durch eine mathematische Formel von algebraischer Form definiert. Die Methode, sie aufzufinden, kann hier nur ganz allgemein angedeutet werden. Sie beruht darauf, dafs der als Bogen eines gröfsten Kreises ausgedrückte Abstand der entferntesten Punkte des darzustellenden Gebietes von dessen Mitte in allen hierhergehörigen Fällen ein kleiner Bruch ist. Da die Einheit des Bogenmafses derjenige Bogen bildet, der gleich dem Radius ist und in Graden ausgedrückt 57° 18′ beträgt, so ist bei einem Gebiet von z. B. 10° Durchmesser der gröfste Bogenabstand eines Randpunktes von der Mitte nur 5° : 57° 18′ oder ungefähr $\frac{1}{11,5}$. Da also die Breiten- und Längendifferenzen gegen die Mitte, die in der Karte vorkommen, diesen Wert nie übersteigen können, so kann man die rechtwinkligen Koordinaten x, y eines Kartenpunktes nach steigenden Potenzen des Meridianbogens s, um welchen dieser Punkt vom Mittelparallel entfernt ist, und des auf dem Mittelparallel gezählten Bogens t, um welchen sein Meridian von der Mitte entfernt ist, entwickeln, wobei die an Gröfse sehr rasch abnehmenden höheren Potenzen der kleinen Brüche von der vierten an vernachlässigt werden können. Giebt man der x-Achse die Richtung nach Norden, nennt α die geographische Breite der Mitte und r_0 den Radius des Mittelparallels, so erhalten mit Berücksichtigung aller Umstände die Koordinaten folgende Ausdrücke:

$$x = s + \frac{\sin\alpha}{2r_0} t^2 + \tfrac{1}{3} As^3 - Bs^2t + Cst^2 + \tfrac{1}{3} Bt^3,$$

$$y = \frac{r}{r_0} t + \tfrac{1}{3} Bs^3 + As^2t - Bst^2 + \tfrac{1}{3} Ct^3,$$

worin A, B, C drei vorläufig unbestimmte Koeffizienten sind. Die mathematische Form dieser Ausdrücke bringt es, wie sich leicht beweisen läfst, mit sich, dafs die Punkte gleicher Deformation auf Ellipsen liegen, welche den Ursprung der x, y, also die angenommene Kartenmitte zum Mittelpunkt haben. Die Gestalt und Lage dieser Ellipsen und die absolute Gröfse der Deformation hängt von den Werten von A, B, C ab. Tissot hat nun ein graphisches Verfahren gelehrt, durch dessen Hilfe man diejenige Ellipse ausfindig machen kann, die für ein bestimmtes Land, wovon man eine Hilfskarte, nach irgend einer der gebräuchlichen Projektionen entworfen, besitzt, die geringste Deformation ergiebt. Die Lage und die Achsenverhältnisse dieser Ellipse, auf der Hilfskarte gemessen, geben dann sehr einfach

die Werte von A, B, C in obigen Formeln, aus denen dann die Koordinaten x, y für beliebige Netzpunkte berechnet werden können.

Im allgemeinen d. h. für unregelmäfsig gestaltete Länder ergiebt sich die Lage der Ellipsenachsen nicht mit den Haupthimmelsrichtungen übereinstimmend, und demnach wird auch die Projektion nicht symmetrisch gegen den Mittelmeridian, immerhin würden aber für eine Karte z. B. von Deutschland die Abweichungen von der Symmetrie für das blofse Auge kaum bemerkbar werden. Für symmetrischer gestaltete Länder, wie z. B. Frankreich oder die iberische Halbinsel kann man, ohne die Deformationsgrenze wesentlich zu vermehren, durch Einführung der Forderung symmetrischer Projektion des Netzes die Formeln weit einfacher gestalten. In diesem Falle führen nämlich jene Formeln auf eine Kegelprojektion. Definiert man den Projektionsradius R_0 des Mittelparallels und den R eines um s abstehenden Parallels durch:

$$R_0 = \frac{r_0}{\sin\alpha}, \qquad R = R_0 - s - \tfrac{1}{6}s^3,$$

ferner $\mu = m \sin\alpha$, wo m die Längendifferenz eines Punktes gegen den Mittelmeridian ist, so werden obige Formeln identisch mit folgenden:

$$x = R_0 - R\cos\mu, \qquad y = R\sin\mu,$$

welche ganz übereinstimmen mit den Formeln für eine echte Kegelprojektion (s. S. 84, wo nur x und y zu vertauschen sind).

Diese Projektion empfiehlt sich auch für Atlaskarten durch die Leichtigkeit ihrer Konstruktion aus konzentrischen Kreisen und geradlinigen Meridianen. Der Abstand eines Parallelkreises vom mittleren ist gleich dem Meridianbogen s vermehrt um ein Sechstel seines Kubus.

Wie hoch diese Projektionsart über der Bonne'schen steht, hat Tissot wieder an Beispielen gezeigt. Die Generalstabskarte von Frankreich in 1 : 80000 hat die Bonne'sche Projektion und den Mittelparallel von 45°. Die gröfste Winkelverzerrung beträgt in ihr 18′, die gröfste Längenveränderung 1 : 380. Durch die Wahl von 46° 30′ als Mittelparallel würden sie auf 10′ 30″ und 1 : 650 haben herabgedrückt werden können. Durch Anwendung obiger allgemeiner Formeln hätte man die Maximaländerung der Winkel auf 25 Sekunden, die der Längen auf 1 : 1100 herabmindern können.

Zur Darstellung einer zwischen 2 Parallelkreisen von mäfsigem Abstand (z. B. 10°) enthaltenen Zone sind die zuletzt genannten Formeln einer Kegelprojektion die geeignetsten. Die Zone zwischen 37½° und 52½°, die das südliche Mitteleuropa umfafst, wird danach

mit Winkeländerungen von nicht über 1′ 20″ und Längenänderungen von nicht über 1 : 230 dargestellt, während die Bonne'sche Projektion die Maximalverhältnisse 14° 40′ und 1 : 7 ergäbe!

Kugelzweiecke zwischen 2 nicht sehr entfernten Meridianen werden durch die Formeln:

$$x = s + \tfrac{1}{2}\, rm^2 \sin l, \qquad y = rm(1 + \tfrac{1}{6}\, m^2 \cos sl),$$

worin r der Erdradius am betrachteten Punkte mit Rücksicht auf die Abplattung und m die in Bogenmafs ausgedrückte Längendifferenz des Punktes gegen den Mittelmeridian ist, und welche nur spezielle Fälle der obigen allgemeinen Formeln sind, auf die vorteilhafteste Weise abgebildet.

Für ein Zweieck von 15 Graden werden die Maximaländerungen 1′ 20″ und 1 : 230, in der Bonne'schen Projektion 7° 30′ und 1 : 15. — Ägypten könnte man danach in einer Breite von 5 Längengraden, vom 9ten bis zum 32sten Parallel mit nur 5 Sekunden Winkel- und 1 : 2000 Längenverzerrung abbilden, während die Bonne'sche Projektion 25′ und 1 : 250 Änderung giebt!

Diesen Thatsachen gegenüber hat die Bonne'sche Projektion fernerhin keine Anwendungsberechtigung mehr, weder für Karten gröfserer, noch für solche kleinerer Gebiete.

Zweite Abteilung.

Topographie.

Erstes Kapitel:

Situationsentwurf.

Die Punkte und Linien der Erdoberfläche, von denen die zu entwerfende Karte eine Abbildung geben soll, sind ein räumliches, d. h. dreidimensionales Gebilde, worin freilich eine Dimension, die der Höhe, sehr zurücktritt gegen die beiden anderen. In der Karte kann man von diesem Gebilde nur eine Ansicht geben und wählt naturgemäfs dazu den Grundrifs, die Projektion auf die mathematische Erdoberfläche, den ideellen Meeresspiegel. Die Grundrifsfigur erhält man, wenn man alle Punkte des wirklichen Terrains durch Lotlinien auf diese Fläche projiziert. Die Aufgabe des Kartenzeichners ist dann, diese Figur in verkleinertem Mafsstabe in das bereits entworfene Gradnetz einzuzeichnen. Es ist dies der Situationsentwurf.

Das Verfahren bei der Konstruktion und Zeichnung von Karten ist je nach der Menge und Beschaffenheit des vorliegenden Aufnahmematerials verschieden. Vor allem richtet sich nach diesen beiden Faktoren der zu wählende Mafsstab; erst in zweiter Linie kann dieser auch dem Bedürfnis angepafst werden, dem die Karte dienen soll. Wenn man absieht von Plänen, die nur ganz beschränkte Lokalitäten behufs technischer oder anderer Zwecke darstellen, so kann man folgende **Klassifizierung der Karten** in 3 Gruppen vornehmen:

I. Pläne und Flurkarten im Mafsstabe von 1 : 500 bis 1 : 10 000; hiezu gehören die Katasterkarten, die Pläne für Eisenbahn- und Kanallinien u. s. w.; die Mafsstäbe von 1 : 2000 bis 1 : 5000 sind die gebräuchlichsten.

II. Topographische Spezialkarten 1 : 10 000 bis 1 : 200 000; die Mafsstäbe von 1 : 25 000 bis 1 : 100 000 sind die am meisten benutzten.

III. Geographische Karten, Übersichtskarten; im Mafsstabe von 1 : 200 000 bis zu den kleinsten.

Es versteht sich von selbst, dafs die Abgrenzungen zwischen diesen 3 Gruppen keine strengen sind. Ein grofser Mafsstab wird gewählt, wenn eine grofse Menge von Detailpunkten in ihrer gegenseitigen Lage bestimmt sind, die kleinsten Teile aller Grenzlinien geometrisch ähnlich abgebildet werden und alle Teile des Bildes deutlich sichtbar und mefsbar sein sollen. Doch wählt man einen grofsen Mafsstab auch häufig bei der ersten Aufzeichnung von spärlicherem Material, z. B. bei Routenkonstruktion, wegen der bequemeren übersichtlicheren Arbeit. Für Wandkarten, die aus gröfserer Entfernung deutlich erkennbar sein sollen, bedingt diese Forderung einen grofsen Mafsstab. Kleiner Mafsstab wird aufser bei Mangel an eingehendem Material auch für solche Karten angewandt, welche mit absichtlicher Unterdrückung bekannten Details allgemeinere Verhältnisse übersichtlich darzustellen bestimmt sind.

Das Material für die Karte kann dem Zeichner in verschiedener Form dargeboten sein: entweder er erhält es aus der Hand des Vermessers als unmittelbares Resultat der Vermessung und ihrer Berechnung in Gestalt eines Verzeichnisses der Bestimmungselemente (Koordinaten) von Punkten, oder es liegt ihm in Gestalt von Zeichnungen vor, die er in der Regel in eine andere Netzprojektion umzuzeichnen, zu vergröfsern oder zu verkleinern und mit einander zu kombinieren hat. Meist aber ist das Material teils in der einen, teils in der anderen Form gegeben, denn ein blofses Punktverzeichnis würde nur dann genügen, wenn alle einzuzeichnenden Figuren geradlinige wären und das Verzeichnis alle Eckpunkte umfafste.

I. Konstruktiver Teil.

A. Die **Eintragung von Punkten**, deren Lage gegeben, ist die erste Aufgabe. **1.** Die Lage von Punkten als Resultat von Vermessungen kann dem Zeichner entweder durch geographische Koordinaten (Breite und Länge) oder durch rechtwinklige Koordinaten gegeben sein. Erstere werden jetzt bei fast allen grofsen Landesvermessungen als Endergebnis der Operationen wenigstens für alle durch die Triangulierung bestimmten Punkte ausgerechnet und bilden das erstrebenswerteste Resultat auch bei flüchtigen Aufnahmen von Reisenden in unbekannten Gegenden. Wie man einen Punkt, dessen geographische Breite und Länge gegeben sind, in das Kartennetz einträgt, ist schon oben S. 21 hinlänglich angegeben. Das Verfahren weist selbst darauf hin, dafs man sich die Sache bedeutend erleichtert, wenn man das Netz recht engmaschig auszieht, was mit Blei-

stift geschieht, so dafs man es aus der fertigen Karte wieder wegwischen kann*).

Was man unter rechtwinkligen sphärischen Koordinaten versteht, ist S. 74 erklärt worden. Sie werden hauptsächlich im Interesse der Detailvermessung angewandt, können unmittelbar nur in der Cassini-Soldner'sche Projektion aufgetragen werden und müssen für anderweitige Verwendung mittels der a. a. O. bezeichneten Formeln und Tabellen erst in geographische Koordinaten umgerechnet werden. Die Auftragung nach rechtwinkligen Koordinaten kommt ausschliefslich bei Karten gröfsten Mafsstabes, den Katasterkarten und Plänen (1 : 5000 bis 1 : 500) vor. Als Koordinatenanfangspunkte dienen dabei gewisse, für gröfsere Gebietskomplexe ausgewählte, behördlich bestimmte Punkte, sämtlich trigonometrische Punkte erster oder zweiter Ordnung der Landestriangulation, im Gebiete der preufsischen Monarchie vierzig**), in den kleineren deutschen Staaten meist je einer oder zwei. In der Regel wird das Kartenblatt den Koordinatenanfangspunkt gar nicht enthalten; alsdann wird mittels eines beliebigen darin enthaltenen trigonometrischen Punktes, dessen Koordinaten bekannt sind, ein sekundäres Achsenpaar gelegt, dessen beiden Achsen um eine ganze Zahl von Hunderten von Meter vom eigentlichen Koordinatenursprung entfernt sind. Mittels dieses lassen sich dann alle Punkte, deren Koordinaten x, y gegeben sind, leicht eintragen, wie folgendes Beispiel zeigen wird. Im darzustellenden Gebiete befinde sich ein trigonometrischer Punkt, dessen Koordinaten seien:

$$x = 14\,375{,}43^{m}; \qquad y = 9\,221{,}81^{m}.$$

Wenn im gegebenen Koordinatensystem die Abscissen x nach rechts, die Ordinaten y nach oben, also nach Norden, positiv gerechnet werden, so liegt der Punkt um $75{,}43^{m}$ rechts von der Geraden, die im Abstande 14 300 vom Anfangspunkt parallel zur Y-Achse gezogen ist und 21,81 über derjenigen, die im Abstand von 9200^{m} parallel zur X-Achse gezogen ist. Ist der Mafsstab der Karte $= \frac{1}{2500}$, so hat man also, nachdem der genannte Punkt auf dem Papier angenommen ist, im Abstand $\frac{75{,}43^{m}}{2500} = 31{,}72^{mm}$ links davon eine nordsüdlich (also bei gewöhnlich orientierter Karte von oben nach unten) verlaufende Gerade zu ziehen und im Abstand $\frac{21{,}81^{m}}{2500} = 8{,}72^{mm}$ süd-

*) Vgl. hierzu auch: Instruktion für die Topographen der topogr. Abt. der K. Preufs. Landes-Aufnahme I S. 83.

**) Man findet dieselben zusammengestellt im Anhange A zur IX. Anweisung vom 25. Oktober 1881 für die trigonometr. u. s. w. Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters S. 341.

lich vom Punkte eine senkrechte zu jener; so hat man das sekundäre Achsensystem. Gewöhnlich zieht man zur Erleichterung des Auftragens der übrigen Punkte ein ganzes Quadratnetz (im vorliegenden Beispiel mit Seiten von $\frac{100^m}{2500} = 40^{mm}$ Länge) aus, das dann später wieder gelöscht werden kann. Zur Punkteintragung nach rechtwinkligen Koordinaten hat man auch mechanische Vorrichtungen, Orthographen oder Ordinatographen.

2. Je mehr Punkte nach vorher berechneten Koordinaten in die Karte eingetragen werden können, um so zuverlässiger wird diese die Figuren der Erdoberfläche wiedergeben. Diese Methode der Punktbestimmung wird aber niemals auf alle Details ausgedehnt werden können. Selbst bei den besten Katasteraufnahmen berechnet man weder die geographischen noch die rechtwinkligen Koordinaten aller Detailpunkte, sondern zeichnet dieselben in die Karte entweder durch Reduktion von Detailplänen, wenn solche schon vorhanden sind, oder, und dies ist meistens der Fall, es geschieht die **Eintragung nach direkten Vermessungsergebnissen.** Die Art dieser Daten hängt von der Aufnahmemethode ab, deren 2 wentlich verschiedene zu unterscheiden sind:

a) Die Kataster- oder Stück-Vermessungsmethode geht aus von den sogenannten Vermessungslinien, Geraden, die zwischen Punkten abgesteckt werden, deren Koordinaten berechnet sind, oder zwischen solchen und Punkten anderer Vermessungslinien. Gegen eine Vermessungslinie können benachbarte Punkte dadurch festgelegt werden, dafs man Senkrechte von diesen auf sie fällt, deren Längen- und Fufspunktsabstände vom Anfang der Vermessungslinie gemessen werden. Diese Elemente können dann im verjüngten Mafsstabe sofort in die Karte eingetragen werden. Aufserdem gehört aber hierher die Aufnahme mittels jeder durch reine Längenmessungen ausführbaren geometrischen Bestimmungsweise*).

b) Die tachymetrische Methode, welche vorzugsweise zur Terrainaufnahme, d. h. zur gleichzeitigen Bestimmung von Punkten ihrer Lage und Höhe nach benutzt wird. Hierbei erfolgt die Festlegung eines Punktes entweder *α*) von 2 Fixpunkten aus, an denen der Winkel zwischen ihrer Verbindungslinie und der Richtung nach dem neuen Punkte gemessen wird; also, geometrisch gesprochen, durch Dreiecksbestimmung aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, welche direkt mittels des Transporteurs an die im Plan

*) Über Stückvermessung und deren Kartierung ist alles Genauere zu finden in VIII. Anweisung v. 25. Okt. 1881 für das Verfahren bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters § 102—108.

gezogene Verbindungslinie jener Fixpunkte angetragen werden; oder β) von einem Fixpunkte aus, indem nur der Winkel zwischen der Richtung nach dem neuen Punkt und einer festen Richtungslinie, aufserdem aber die Entfernung nach dem Punkte gemessen wird. So können von einem Fixpunkte F aus beliebig viele Punkte $P, P_1, P_2, P_3 \ldots$ durch Messung der Winkel $F'FP, F'FP_1, F'FP_2 \ldots$ sowie der Längen $FP, FP_1, FP_2 \ldots$ festgelegt werden. Als feste Richtung FF' des Polarkoordinatensystems, nach welchem hier die Punktbestimmung erfolgt, dient entweder die Richtung nach einem zweiten Fixpunkt F', der schon in die Karte eingetragen ist, oder die Richtung des magnetischen Meridians, welche durch die Magnetnadel der Bussole des Tachymeter-Theodolits*) angegeben wird. Diese unter β) angegebene Bestimmungsweise ist die für die Tachymeteraufnahme charakteristische. Die gemessenen Winkel werden mittels des Transporteurs an die feste Richtung im Plan angetragen und auf dem Schenkel die gemessene Distanz im verjüngten Mafsstab abgestochen.

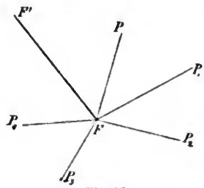


Fig. 85.

Kartenkonstruktionen nach solchen direkt von der Aufnahme gelieferten Materialien werden vorzugsweise bei Plänen in grofsem Mafsstabe ausgeführt und beziehen sich dann jedesmal nur auf den kleinen innerhalb benachbarter Fixpunkte enthaltenen Flächenraum. Die Zeichnung des angrenzenden Gebietes wird dann mit Zuhilfenahme anderer Fixpunkte ausgeführt. Es können sich deshalb etwaige Fehler der Auftragung nicht häufen. Ebensowenig können unzulässige Verzerrungen wegen der Projektionsart entstehn, falls nur die Fixpunkte richtig in das Gradnetz eingetragen sind. Die Herstellung und Auszeichnung der Spezialkarten von Landesaufnahmen ist aber Sache der Feldmesser und Topographen selbst und wird nur selten dem Geographen zufallen.

B. Jedem, der sich mit Geographie beschäftigt, kommen aber zweierlei konstruktive Arbeiten sehr häufig vor. Erstens die **Aufzeichnung von Routen** aus den von Reisenden gelieferten Aufnahmematerialien, zweitens die Einzeichnung neuer Verkehrswege, Grenzen und anderer topographischer Objekte in bereits vorhandene

*) Unter einem Theodolit versteht man ein mit Fernrohr zum Visieren versehenes Instrument, welches Horizontal- und Höhenwinkel zu messen gestattet. Ist das Fernrohr noch mit einer Einrichtung zur Distanzmessung und mit einer Bussole versehen, so nennt man es Tachymeter-Theodolit oder kurzweg Tachymeter, d. i. Schnellmesser.

Spezialkarten. Die geometrische Aufgabe des Zeichners ist in beiden Fällen wesentlich dieselbe und fällt auch zusammen mit der Hauptaufgabe der Navigation, dem Auftragen der gesegelten Kurse in eine Seekarte. Ihre Behandlung wird im folgenden vorzugsweise an den ersteren Fall angeknüpft werden.

Die sogenannten flüchtigen Aufnahmen, wie sie der Reisende gewöhnlich auszuführen im stande ist, sind zunächst darauf gerichtet, den durchzogenen Weg aufzuzeichnen, was je nach den Mitteln und Fähigkeiten des Reisenden mit sehr verschiedener Genauigkeit geschehen kann.

Die Festlegung des durchzogenen Weges erfolgt durch Entfernungs- und Richtungsangaben. Aus Entfernungsangaben allein kann nur dann ein Bild des Wegs entworfen werden, wenn man annimmt, dafs er geradlinig verlaufe, was ja, wenn von einem Orte ein anderer bestimmter Ort erreicht werden soll, meist annähernd der Fall sein wird, wenn nicht erhebliche Terrainhindernisse vorhanden sind. Will man aber den Weg in eine Karte eintragen, so mufs man wenigstens auch die Himmelsrichtung kennen, in welcher der Endpunkt vom Anfangspunkt liegt. Auch wenn Richtungsangaben vorhanden sind, giebt die danach zu entwerfende Zeichnung immer nur ein annäherndes Bild; denn zwischen je 2 aufeinanderfolgenden Punkten, wo die Richtung bestimmt worden ist, mufs der Weg in Ermangelung weiterer Angaben als geradlinig angenommen werden.

Kommen zu den angeführten Angaben noch Peilungen, d. h. Richtungsbestimmungen nach benachbarten Objekten, so kann hierdurch die Darstellung auch zu beiden Seiten der Route über einen mehr oder weniger breiten Streifen Landes ausgedehnt werden.

1. Die **Entfernungsangaben**, mit denen der Kartograph zu arbeiten hat, beruhen nur in verschwindend wenigen Fällen auf wirklichen Längenmessungen, sondern sind meist Angaben der Marsch- oder Fahrzeit. Erst wenn die Geschwindigkeit der Fortbewegung, d. h. die Länge des in der Zeiteinheit (z. B. der Minute) zurückgelegten Wegs bekannt ist, kann die Zeitangabe in eine Länge umgerechnet werden, indem man die Zeit mit der Geschwindigkeit multipliziert. Die Reduktion der Zeitangaben auf Weglängen ist von elementarster Einfachheit, wenn die Bewegungsgeschwindigkeit des Reisenden eine unveränderliche, ein für allemal gegebene ist. Bei gewissen Arten des Reisens, z. B. der Karawanenreise mit Lastkamelen oder bei Fufsreisen auf ebenem Terrain kann man die Voraussetzung konstanter bekannter Geschwindigkeit in der That machen ohne merkliche Fehler befürchten zu müssen; bei anderen Fortbewegungsarten aber, die durch äufsere Umstände sehr beeinflufst sind, wie

z. B. das Segeln durch Richtung und Stärke des Windes, Flufsfahrten durch die Stromgeschwindigkeit, und jede Fortbewegungsart durch Terrainschwierigkeiten, ist es oft eine äufserst schwierige und zeitraubende Aufgabe, für jede Wegstrecke die richtige Geschwindigkeit zu ermitteln, vermöge deren die zurückgelegte Wegelänge zu berechnen ist. Nur wenn der Reisende Mafsangaben für die jeweiligen Geschwindigkeiten notiert hat, ist der Kartograph allen Zweifeln enthoben; in der Regel aber wird er aus Notizen von sehr allgemeinem Charakter wie z. B. guter, mäfsiger, schwacher Wind, starker oder schwacher Strom, steiler, steiniger, sandiger Weg, sich ein Urteil über die Geschwindigkeit der Reise zu bilden haben; und nur Erfahrung und natürlicher Takt werden hierbei zu annähernd richtigen Schätzungen führen. Einen sicheren Anhalt für richtige Weglängen-Bestimmung geben, wie später gezeigt werden wird, von Zeit zu Zeit ausgeführte astronomische Breitenbestimmungen.

Von den verschiedenen Bestimmungsarten der Weglänge, die dem Geographen vorkommen, ist die vagste die nach Tagereisen. Abgesehen von der Verschiedenheit, welche bei jeder einzelnen Reise zwischen den an verschiedenen Tagen zurückgelegten Wegen durch Transportmittel, Terrainbeschaffenheit, Verteilung von Wasser und Brennmaterial u. s. w. bedingt wird, ist selbst schon die Bestimmung der Länge der mittleren Tagereise häufig schwierig und kann nur bei genauerer Kenntnis des Landes, der Transportmittel und der Gewohnheiten der Bewohner mit einiger Wahrscheinlichkeit ausgeführt werden. Von europäischen Reisenden erkundete Routen können deshalb meist nur dann mit einiger Zuverlässigkeit kartographisch niedergelegt werden, wenn die Reisenden selbst Angaben über das Transportmittel und die mittlere Länge einer Tagereise in Stunden zufügen; oder wenn mehrere Routen von bekannten Orten an einem Punkte zusammenlaufen. Ein auffallendes Beispiel, zu welchen Fehlern die Unkenntnis der Tagereisenlänge führen kann, bietet die Oasengruppe Kufra in der östlichen Sahara. Auf die Nachrichten hin, dafs die nördlichste Oase Taiserbo $4\frac{1}{2}$ starke Tagereisen südlich von der bekannten Oase Djalo (29° N. Br.) gelegen sei, war Taiserbo von allen Geographen auf etwa 27° N. Br. angegeben worden. Erst als Rohlfs und Stecker diesen Ort wirklich erreicht hatten, zeigte sich, dafs er unter $25\frac{1}{2}°$, also $1\frac{1}{2}°$ südlicher liegt. Man hatte freilich nicht voraussetzen können, dafs man jeden Tag 90^{km} zurücklegen mufs, um den völlig wasser- und vegetationslosen ebenen Wüstengürtel von 400^{km} Breite in $4\frac{1}{2}$ Tagen zu durchschneiden.

Wenn, wie dies meistens geschieht, die Reisedauer von Ort zu Ort in Stunden und deren Unterabteilungen angegeben wird, so läfst

sich die Wegelänge in den meisten Fällen mit hinreichender Annäherung ermitteln, denn bei längeren Reisen wird immer der bequemste gleichförmigste Weg aufgesucht, und unter solchen normalen Verhältnissen lassen sich für die gewöhnlichen Beförderungsarten die Geschwindigkeiten hinlänglich genau angeben. Auf festem, ebenem Boden ist die Geschwindigkeit eines Fufsgängers etwa 5^{km} in der Stunde. Eine Karawanenstunde, d. h. die von Lastkamelen in einer Stunde zurückgelegte Strecke ergiebt sich nach vielen Bestimmungen zu 4^{km}*). Reitkamele (Meheri, Hedjîn) gehen freilich viel schneller, 9 bis 10^{km} die Stunde. — Es lohnt nicht, allgemeine Angaben über die Geschwindigkeit anderer Beförderungsmittel, wie Ochsenwagen, Pferdefuhrwerk, Hundeschlitten u. s. w. zu machen, weil dieselbe zu sehr von Nebenumständen abhängt und man dabei meist auf die jeweiligen Angaben der Reisenden angewiesen ist. Gewissenhafte Reisende nehmen Gelegenheit ihre Geschwindigkeit wenigstens mittels ihres Schrittes zu kontrolieren. Ist die individuelle Schrittlänge nicht besonders angegeben, so ist der Schritt $= 0{,}8^{m}$ anzunehmen**). Die Geschwindigkeit von Schiffen wird durch das Logg bestimmt und kann deshalb in zuverlässigerer Weise angegeben werden. Findet die Fahrt auf einem Flusse statt, so mufs, falls nicht die wahre Geschwindigkeit gegen feste Uferpunkte direkt gemessen ist, die Stromgeschwindigkeit bei der Bergfahrt negativ, bei der Thalfahrt positiv der Fahrgeschwindigkeit zugefügt werden. Leider bleibt nur allzu oft die Stromgeschwindigkeit unbekannt. — Auf See (aber auch vielfach zu Land) werden die Entfernungen nach Seemeilen angegeben***).

Bei der Auftragung von Routen, die zunächst in der Regel ohne Rücksicht auf die Projektionsart des Gradnetzes ausgeführt wird, kommt es zunächst auf die Wahl des verjüngten Mafsstabs der Längen an. Es giebt 2 Arten den Übertragungsmafsstab anzugeben. Entweder man fordert, dafs eine bestimmte Wegelänge (Tagereise, Meile, Stunde) durch eine gewisse Strecke des gewöhnlichen Längenmafses (Zoll, Millimeter) dargestellt werden soll; oder man wählt sofort ein einfaches Zahlenverhältnis der Verkleinerung, z. B. 1 : 100 000. Die erstere Art der Mafsstabsangabe findet man vorzugsweise bei englischen und russischen Karten, wobei meist gesagt wird, wieviel

*) Jordan, Handbuch der Vermessungkunde I, S. 166.

**) Jordan, Handbuch der Vermessungskunde I, S. 164.

***) 1 Seemeile (von den Engländern nautical mile, meist aber geographical mile genannt) ist eine mittlere Meridianminute, d. h. der 60×90^{ste} Teil des Erdmeridianquadranten, demnach $= 1852^{m}$ und um 3^{m} kleiner als eine Äquatorminute. Die gewöhnliche englische Meile (statute-mile) hingegen ist = 5280 feet $= 1609^{m}$.

Meilen (statute-, nur auf Seekarten geographical miles) bez. wieviel Werst (zu 500 Sajên = 3500 ft = 1067^m) durch einen Zoll dargestellt werden. Die absoluten Verhältniszahlen werden dann, namentlich bei dem ausgesucht unpraktischen englischen Mafssystem, unhandliche Zahlen; so z. B. bedeutet der Mafsstab von 1 Mile = 1 Zoll das Verhältnis 1 : 63 360; 1 Werst = 1 Zoll dagegen 1 : 42 000. Der Vorteil, den diese Bestimmungsart bietet, ist beim Metersystem mit demjenigen einfacher Reduktionszahlen verbunden, die ohne Umrechnung sich ergeben; so entspricht $1^{km} = 1^{cm}$ dem Mafsstab 1 : 100 000.

Die Gröfse der Verjüngung wird vorzugsweise nach den schon S. 113 angegebenen Gesichtspunkten, aufserdem aber noch nach den Bedürfnissen der Bequemlichkeit, Papiergröfse u. s. w. gewählt.

2. Die denkbar einfachste Aufgabe ist die **Routenaufzeichnung aus blofsen Entfernungsangaben**; sie bietet sich dar, wenn, wie dies häufig bei erkundeten Reisen geschieht, aufser der allgemeinen Richtung der Reise nur die Nachthaltestationen angegeben sind, der ganze Weg also nur in Tagereisen abgeteilt ist, die man einander gleich annehmen mufs. Zahlreiche Beispiele dieser Art bieten die Reisewerke von H. Barth, Nachtigal, Rohlfs u. s. w. Um eine solche Route aufzuzeichnen oder in eine Karte einzutragen, zieht man durch den Bildpunkt des Ausgangspunktes die (bei gewöhnlicher Art der Orientierung von oben nach unten laufende) Gerade, welche die Meridianrichtung darstellt, und dann durch denselben Punkt eine zweite Gerade in der vorgeschriebenen Reiserichtung. Auf dieser ist die in verjüngtem Mafsstab eine Tagereise darstellende Strecke so oft aufzutragen, als die Reise Tagereisen lang ist. Jeder abgestochene Punkt ist mit dem Namen des betreffenden Nachtquartiers zu bezeichnen. In den Mitteilungen der Afrikanischen Gesellschaft Bd. 2, S. 37 giebt Rohlfs eine Anzahl erkundeter Reisen in Tripolitanien. Hier bilden Lastkamele das Beförderungsmittel. Nimmt man den Tagemarsch zu 10 Stunden, so würde er in absolutem Mafse = 40^{km} sein; bei Auftragung im Mafsstabe von 1 : 500 000 also 8^{cm} lang zu nehmen sein. — Ist die Entfernung zu 7 starken, oder gar sehr starken Tagemärschen angegeben, so bleibt (falls der Reisende nicht gesagt hat, was darunter zu verstehen sei) nichts übrig als die Tagemärsche mit 11 bez. 12 Stunden oder mehr anzunehmen. Die Willkür, welche hierin liegt, wird nur dann gehoben, wenn der Endpunkt, oder überhaupt ein Punkt der Route bereits seiner Lage nach bekannt ist. Unter Nr. VIII giebt z. B. Rohlfs die Route von Bengasi nach Derna zu 8 Tagereisen an. Die Entfernung beider Mittelmeerküstenstädte läfst sich auf irgend einer guten Karte unmittelbar mittels des Zirkels am Entfernungsmafsstab in Kilometern abgreifen. Teilt man sie

durch 8, so hat man unmittelbar die Länge einer Tagesreise für diese spezielle Route.

Auch in einem anderen Falle kann man die Tagereisenlänge ermitteln; wenn nämlich von 2 ihrer Lage nach bekannten Ausgangspunkten 2 Routen auf denselben Zielpunkt endigen.

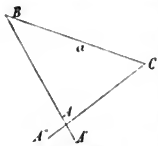


Fig. 86.

B und C seien die in bekannter Entfernung a liegenden Ausgangspunkte, A der Konvergenzpunkt der Routen, welche m, bez. n Tagereisen betrügen. Ist t die unbekannte Tagereisenlänge in km, so ist $AB = mt$, $AC = nt$. Da die Richtungen von AB und AC bekannt vorausgesetzt werden, so ist auch der Winkel A bekannt und:

$$a^2 = (mt)^2 + (nt)^2 - 2mnt^2 \cos A,$$

woraus:

$$t = \frac{a}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos A}}.$$

Die Gröfse t kann durch blofse Konstruktion erlangt werden, wenn man von den richtig eingetragenen Punkten B und C aus in den gegebenen Richtungen die Geraden BA' und CA'' zieht und die Längen AB und AC in m bez. n gleiche Teile teilt.

Solche Bestimmungen der Längeneinheit sind bei der Konstruktion von Routennetzen möglichst häufig zu erstreben. Die Kenntnis derselben kann dann für andere Routen in derselben Gegend verwertet werden, namentlich wenn diese auf den Angaben derselben Gewährsmänner beruhen.

Häufig sind die Märsche und ihre Abteilungen etwas eingehender angegeben. Als Beispiel mag eine von Heuglin erkundete, von Darfur über Hoferat-en-Nahas nordsüdlich verlaufende Route dienen (s. Peterm. Mitteil. Ergbd. II S. [107]). Die Tagereise ist dort zu 7 Stunden Eselsmarsch angegeben, was man $= 28^{km}$ setzen kann. Die Entfernungsangaben enthalten ganze, halbe, starke und schwache Tagemärsche, auch kommen einzelne Stunden vor. Hier hat es keine Schwierigkeit, alles in Stunden auszudrücken, indem man die starke Tagereise $= 8^h$, die schwache $= 6^h$ setzt. Es wird dann ein verjüngter Mafsstab entworfen, der in Stunden eingeteilt ist, und danach die einzelnen Strecken aufgetragen. Auf umstehender Seite findet man die genannte Route zunächst aufgeschrieben nebst der Umrechnung der Entfernungen in Stunden und daneben deren Aufzeichnung im Mafsstabe von 1 : 5 Millionen, worin $1^h = 4^{km}$ durch die Länge von $0{,}8^{mm}$, eine gewöhnliche Tagereise also durch $5{,}6^{mm}$ dargestellt wird.

Der für eine Routenkonstruktion ungewöhnlich kleine Mafsstab ist hier mit Rücksicht auf das Format des Papiers gewählt.

Route von Kobe in Darfur über Hoferat-en-Nahas zur Residenz des Mofiô.

1 Tagereise = 7^h Eselsmarsch (zu 4^{km}); Richtung N-S.

Es bedeuten: sw. schwach, st. stark.

Kobe	nach Menauaschi	= 3	Tgr.	sw.	= 18^h
Menauaschi	„ Qeidumbah	= $2\frac{1}{2}$	„		= $17\frac{1}{2}$
Qeidumbah	„ Dâba Scheiboh	= 1	„	st.	= 8
Dâba Scheiboh	„ Quenqari	= $\frac{1}{2}$	„		= $3\frac{1}{2}$
Quenqari	„ Thal m. Brunnen	= $2\frac{1}{2}$	„		= $17\frac{1}{2}$
Thal	„ Hoferat-en-Nahas	= $1\frac{1}{2}$	„		= $10\frac{1}{2}$
Hoferat	„ Bach (n. E. fließend)	= 1	Stunde		= 1
Bach	„ Sumpfsee Tibneh	= $\frac{1}{2}$	Tgr.		= $3\frac{1}{2}$
Tibneh	„ Chor el Buta	= 1	„		= 7
Ch. el Buta	„ Regenbett	= $2\frac{1}{2}$	„	sw.	= 15
Regenbett	„ Kudwaqeh	= $\frac{1}{2}$	„		= $3\frac{1}{2}$
Kudwaqeh	„ Sultan Matr	= 3	„		= 21
Matr	„ Bed Qoqon-qonqo	= 4	„		= 28
B. Qoqonqonqo	„ Udjanga	= $\frac{1}{2}$	„		= $3\frac{1}{2}$
Udjanga	„ Kerafeh	= $4\frac{1}{2}$	„		= $31\frac{1}{2}$
Kerafeh	„ Keraf-el-Qolaui	= $\frac{1}{2}$	„	st.	= 4
K. el Qolaui	„ Mofiô	= 1	„	st.	= 8
	Zusammen:	29	Tagr.		= 201^h
					= 804^{km}

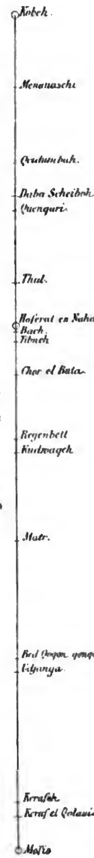
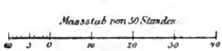


Fig. 87.



3. Gebildete Reisende geben ihre **Itinerarien mit Entfernungs- und Richtungsangaben** nach der Bussole und unterscheiden sich untereinander hauptsächlich durch die Sorgfalt der Geschwindigkeitsschätzung und die Häufigkeit der Richtungsbestimmung. Manchmal wird nur die Hauptrichtung des ganzen Tagemarsches, öfter die Marschrichtung einigemal des Tags angegeben; sorgfältige Reisende notieren aber bei jeder Biegung des Wegs Zeit und Richtung, sodafs der Weg in allen Einzelnheiten seines Verlaufs niedergelegt werden kann*).

Die Bussole (der Kompafs) giebt den Winkel der anvisierten Wegerichtung gegen den magnetischen Meridian an. Ihr Kreis sollte in 360° eingeteilt und durchlaufend von 0 bis 360 links herum numeriert sein. Man visiert über denjenigen Durchmesser hin, der die Zahlen 180 und 0 verbindet und liest dann am Nordende der Nadel unmittelbar das magnetische Azimut ab, d. h. denjenigen Winkel, der die magnetische Nordrichtung zum linken, die anvisierte Richtung zum rechten Schenkel hat. (Für alle westlichen Richtungen

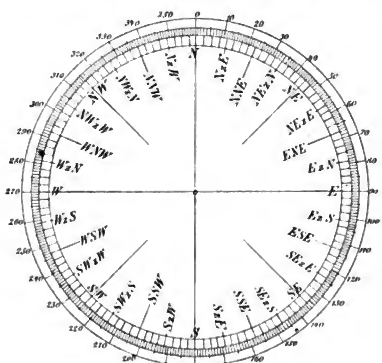


Fig. 88.

liegt dieser Winkel natürlich zwischen 180° und 360°.) Gleichfalls zweckmäfsig, nur umständlicher zu notieren ist die Einteilung des Schiffskompasses nach 32 um je $11\frac{1}{4}$° von einander unterschiedenen Himmelsrichtungen, deren Zwischenraum noch in je 4 Striche geteilt wird. Durchaus verwerflich, weil den meisten Irrtümern

*) Über sogenannte flüchtige Aufnahmen und deren Verwertung s. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde S. 696 sowie desselben Verfassers Physische Geographie der libyschen Wüste, Kassel 1876.

der Ablesung aussetzend, sind die Bussolenkreise, deren 4 Quadranten in je 90 Teile geteilt sind, wobei also 2 Buchstaben und eine Zahl angegeben werden müssen; so z. B. wäre SSW = S 22½ ° W. — Die Beziehungen zwischen den Angaben des Schiffskompasses und der gewöhnlichen Kreisteilung ergeben sich aus der Strichrose Figur 88*).

Um eine nach der Bussole bestimmte Richtung in die Karte einzutragen mufs man den Winkel kennen, den der magnetische Meridian mit dem astronomischen bildet; dieser Winkel heifst die magnetische Deklination oder Misweisung. Wenn der Reisende dieselbe nicht selbst bestimmt hat, so ist sie den magnetischen Karten (z. B. der deutschen Seewarte) zu entnehmen. Die Unsicherheit der Kenntnis derselben in den unbekannten Binnenräumen der Kontinente kann dann Fehler bis zu 2° verursachen, die aber nur bei sehr langen und sehr genau aufgenommenen Routen störend wahrnehmbar sein würden. Ist die Deklination eine westliche, so wird ihr Betrag von dem magnetischen Azimut abgezogen; ist sie eine östliche, zugefügt. Das Resultat ist das astronomische oder wahre Azimut.

Die Auftragung erfolgt nun in der Art, dafs man am Ausgangspunkt der Route die Meridianrichtung kenntlich macht (z. B. mittels einer durchgezogenen Geraden), mit dem Transporteur die Richtung der ersten Strecke vom Ausgangspunkt aus anträgt und ihre Länge mit dem Zirkel absticht. Der abgestochene Punkt giebt dann den Ausgangspunkt für die zweite Strecke ab, u. s. w. Es giebt verschiedene Mittel, um diesen Prozefs mechanisch abzukürzen. Arbeitet man mittels eines Reifsbretts, so wählt man die Richtung einer Kante als Nordrichtung und hat dann an der Kante der festangelegten Reifsschiene (des Anschlagelineals) stets die Nordrichtung bereit. Trägt man die Route auf millimetrisch eingeteiltes Zeichenpapier auf, so geben dessen Linien stets die vier Kardinalrichtungen und man braucht keine Reifsschiene. Am genausten arbeitet man mit einem Regeltransporteur der von Jordan angegebenen Konstruktion**), welcher den Vorteil bietet, dafs man an ihm die magnetische Deklination durch Einstellen des Instruments in Rücksicht ziehen kann und, die unkorrigierten magnetischen Azimute am Kreise des an die Reifsschiene angesetzten Transporteurs einstellend, die wahren Richtungen auf dem Papier erhält.

---

*) Tabellarische Übersicht der Winkel der Kompafsstriche mit dem Meridian s. Geogr. Jahrbuch I, S. CIII.

**) Handbuch der Vermessungskunde I, S. 632. — Das an dieser Stelle abgebildete Instrument setzt allerdings westliche Misweisung voraus. Es hätte aber keine Schwierigkeit ein ähnliches für beiderlei Deklinationen herzustellen.

Die gefundene Lage des Endpunktes einer Route auf der Karte ist von verschiedenen Fehlerquellen beeinflufst. Den gröfsten Fehler pflegen die mangelhaften Entfernungsmessungen oder Schätzungen der Reisenden zu verursachen, dann sind die Richtungsangaben oft ungenau und endlich entstehen Fehler beim Auftragen, die namentlich dann gröfsere Beträge erreichen, wenn die Route aus sehr vielen kleinen Strecken zusammengesetzt ist. Die Entfernungsfehler sind deshalb die bedeutendsten, weil sie alle in demselben Sinne wirken, denn meist überschätzt der Reisende sämtliche zurückgelegten Strecken, seltener unterschätzt er sie und kaum je beurteilt ein Reisender seine Geschwindigkeit so richtig, dafs seine Entfernungsangaben ebenso oft zu grofs, wie zu klein ausfallen. Viel weniger gefährlich sind die Richtungsfehler, weil hier Fehler nach der einen wie nach der anderen Seite hin gleich wahrscheinlich sind, also im Verlauf zahlreicher Ablesungen ebensoviel Fehler nach rechts wie nach links vermutet werden können, die sich in ihrer Gesamtwirkung auf die Wegerichtung ungefähr ausgleichen müssen.

4. Das beste Mittel die Entfernungsfehler, einschliefslich der bei der Auftragung begangenen, zu verbessern, ist die **Einpassung in astronomische Breitenbestimmungen**. Sind die geographischen Breiten β und β' des Ausgangs- und Endpunktes einer Route bekannt, so kann man auch die Entfernung der durch beide gelegten Parallelkreise leicht angeben. Hiezu dient die Tafel von Wagner, S. 86 zweite Kolumne, aus welcher man die Länge der verschiedenen Meridiangrade in Metern entnimmt. Drückt man die Differenz $\beta - \beta'$ in Minuten aus, so hat man $\frac{\beta - \beta'}{60}$ von derjenigen Gradlänge zu nehmen, auf welche die Strecke zwischen β und β' ungefähr fällt. Ist z. B. $\beta = 13^0\ 32'$; $\beta' = 11^0\ 54'$ also $\beta - \beta' = 98'$, so würde man von der zwischen 12^0 und 13^0 enthaltenen Gradlänge $110\,616^m$ den Bruchteil $\frac{98}{60}$ nehmen, erhält also die Entfernung der beiden Parallelkreise $= 180\,672^m$. Multipliziert man mit dem Reduktionsverhältnis der Karte, so kann man die erhaltene Länge auf dem Meridian des Ausgangspunktes A, von diesem aus nach B (Fig. 89) abstechen und erhält dann, indem man durch B eine Senkrechte zum Meridian zieht, den Parallel BP des Endpunktes.

In der Regel wird der Endpunkt der nach den oben gegebenen Vorschriften konstruierten Route aber nicht auf diese Gerade fallen, sondern, wenn die Entfernungen überschätzt sind, drüber hinaus, z. B. nach E. Es handelt sich dann darum, alle Längen

$$Aa,\ ab,\ bc,\ \ldots\ cE$$

in demselben Verhältnisse so weit zu verkürzen, dafs der Punkt E auf die Linie AP fällt; wobei aber die Richtungen dieser sämtlichen Strecken unverändert bleiben sollen. Die Aufgabe wird gelöst, indem

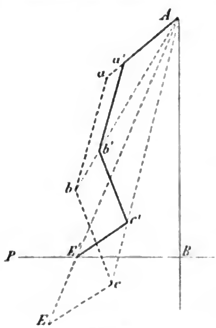


Fig. 89.

man A mit E durch eine Gerade verbindet und den Endpunkt in den Punkt E' versetzt, wo diese Gerade die Linie BP schneidet. Verbindet man alle übrigen Punkte b, c mit A und zieht dann $E'c'$ parallel zu Ec, $c'b'$ parallel cb, $b'a'$ parallel ba, so erhält man in $A\,a'\,b'\,c'\,E'$ die Route, welche obige Forderungen erfüllt; denn die Gemeinsamkeit der Seiten Ab und Ab' in den beiderseits anliegenden ähnlichen Dreieckspaaren ergiebt die Gleichheit der Verhältnisse:

$$Aa' : Aa = a'b' : ab = b'c' : bc,$$

welche sich fortsetzt bis zu dem Verhältnisse der letzten Strecken $c'E' : cE$. Man übersieht auch leicht, dafs das Verfahren für Routen, die aus irgend einer beliebigen Streckenzahl zusammengesetzt sind, gültig ist.

Die Benutzung einer Peilung d. h. der Visur nach einem Ort von bekannter Lage, z. B. einem Berggipfel kann oft dieselben Dienste leisten wie eine bekannte geographische Breitendifferenz. Angenommen von dem Orte E' aus sei ein solcher Berggipfel G im wahren Azimut von 317° gepeilt werden. $A\,a\,b\,c\,d\,e\,E$ sei die konstruierte Route. Trägt man den Berg G nach seiner geographischen

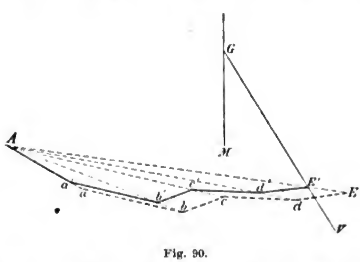


Fig. 90.

Länge und Breite in die Karte ein, zieht einen Meridian GM und trägt den Winkel $MGV = 360^0 - 317^0 = 43^0$ an, so erscheint von jedem Punkte der Linie GV aus gesehen der Berg G im Azimut von 317°. Der Punkt E', von dem aus die Visur genommen wurde,

mufs also auf dieser Linie liegen. Zieht man AE, so ist deren Schnitt mit GV das gesuchte E' und man erhält die richtige Route durch Verkürzung aller Strecken in gleichem Verhältnisse genau wie im vorigen Falle, indem man alle Brechpunkte $a\ b\ c\ d\ e$ mit A verbindet und Parallele zu Ee, ed, dc ... zieht.

Die Entfernungsreduktion mittels bekannter Breitendifferenz ist am sichersten, wenn die Route in annähernd meridionaler Richtung verläuft; sie wird sehr unsicher, sobald der Verlauf sich dem Parallelkreise nähert, und versagt ganz ihren Dienst, sobald Ausgangs- und Endpunkt auf demselben Parallel liegen. In solchen Fällen könnte man von einer Kenntnis der geographischen Längendifferenz denselben Vorteil ziehen, wie bei meridionalem Routenverlauf von der der Breitendifferenz. In der Praxis liegt aber diese Möglichkeit nur selten vor, weil nur sehr wenige Reisende in der Lage sind, genaue Längenbestimmungen zu machen. Wenn aber Längenbestimmungen gemacht werden, so sind sie auch fast immer mit Breitebestimmungen verbunden und man hat dann die andere Aufgabe zu lösen: Zwischen 2 ihrer Lage nach gegebene Punkte eine aufgenommene Route einzupassen. Diese Aufgabe kann nicht durch Reduktion der Entfernung allein gelöst werden, sondern es mufs im allgemeinen auch eine Richtungsveränderung vorgenommen werden. Ist AE die konstruierte Route, B der richtige Ort des Endpunktes, so ist zunächst das Längenverhältnis der Strecken so zu ändern, dafs der Punkt E in die richtige Entfernung von A kommt. Beschreibt man mit AB einen Kreisbogen und verlängert die Gerade AE bis zum Schnitt E' mit jenem, so ist zunächst die Route auf E' als Endpunkt in bekannter Weise zu reduzieren. Dann müssen sämtliche Azimute der Strecken so verändert werden, dafs der Punkt E' nach B rückt. Da man keine Veranlassung hat, das Azimut einzelner Strecken mehr oder weniger als das anderer zu korrigieren, so dreht man die Route als Ganzes um A als Drehpunkt, bis E' nach B fällt. Hiebei werden alle Azimute in gleichem Sinne um denselben Winkel verändert; und die Aufgabe ist gelöst.

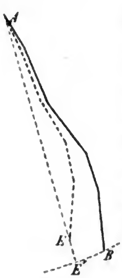


Fig. 91.

Wenn von einem Ausgangspunkt A nach demselben Orte zwei verschiedene Routen gegeben sind, so wird die Konstruktion beider im allgemeinen nicht auf denselben Endpunkt treffen. Wenn die erste auf E_1 (Fig. 92) trifft, wird die zweite etwa auf E_2 treffen. Wenn man keine Veranlassung hat, die eine Aufnahme für besser zu halten als die andere, so mufs man von dem Prinzip ausgehn, dafs

bei jeder der beiden Routen derselbe Fehler in der Länge und auch gleicher Fehler in der Richtung begangen worden sei. Daraus folgt, dafs der wahrscheinlichste Abstand des wirklichen Endpunktes von A weder AE_1 noch AE_2, sondern:

$$AE = \tfrac{1}{2}(AE_1 + AE_2)$$

ist. Beschreibt man also von A als Mittelpunkt einen Kreisbogen KEK' mit dieser Länge, so mufs der Endpunkt E darauf liegen. Um seine Lage ganz zu bestimmen, hat man noch den Winkel E_1AE_2 zu halbieren. Die Halbierungslinie giebt E als Schnittpunkt mit jenem Kreisbogen. (Wie man sieht, kann dieser Punkt nur ausnahmsweise in die Gerade E_1E_2 fallen.) Auf den Punkt E als Endpunkt müssen nun beide Routen übertragen werden. Bei strenger Ausführung würde man zunächst in der früheren Art mittels Parallelziehung u. s. w. die Längenreduktion vornehmen, d. h. die Routen auf E'_1, bez. E'_2 als Endpunkte übertragen und dann beide Routen um den Winkel $E_1AE = EAE_2$ gegeneinander drehen*).

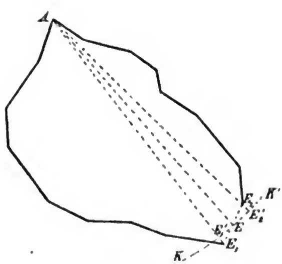


Fig. 92.

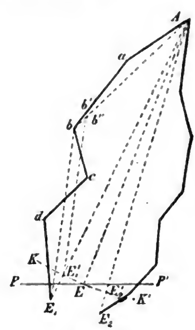


Fig. 93.

Ist für den Endpunkt E die geographische Breitendifferenz gegen A gegeben, so ist er in den Schnittpunkt der Halbierungslinie des Winkels E_1AE_2 mit dem Parallelkreis PEP' zu verlegen (s. Fig. 93). Man schlägt dann den Bogen KEK', überträgt E_1 nach E'_1, und E_2 nach E'_2, worauf beide Routen auf E'_1 bez. E'_2 reduziert und dann um die gleichen Winkel EAE_1 bez. EAE_2 zusammengeschwenkt werden.

Es kommt leicht vor, dafs die vorläufig konstruierten Routen

*) Über die technische Ausführung dieser Drehung siehe Anhang.

sich schneiden. Dadurch wird an der Konstruktion nichts geändert, als dafs schliefslich die rechte Route nach rechts, die linke nach links geschwenkt werden mufs. — Ein gewandter Kartograph macht, nachdem der Punkt E bestimmt ist, die fernere Übertragung meist aus freier Hand, höchstens mit genauer Konstruktion von einigen ausgezeichneteren Punkten der Route, wie z. B. des Punktes b in nebenstehendem Beispiel. Durch direkte Verbindung mit E_1 und Parallelziehung durch E'_1 kann man nämlich jeden einzelnen Punkt, wie hier b, unabhängig von den anderen an die richtige Stelle übertragen; b kommt so zunächst nach b' und durch die Schwenkung um den Winkel $b'Ab'' = E_1AE$ an die definitive Stelle b''*).

5. Genauere, sehr gleichförmig durchgeführte Wegeaufnahmen kann man weit sicherer zu Papier bringen, indem man sie berechnet. Das Verfahren ist das von Seefahrern allgemein beim Absetzen des gesegelten Kurses in die Karte eingehaltene und heifst das **Koppeln der Kurse.** Für den Seemann kommt es allerdings weniger auf die Ermittelung der Figur des Wegs, als vielmehr auf diejenige der Endposition an; die Koppelkursrechnung kann aber für den einen Zweck so gut wie für den anderen verwandt werden, und während der Seemann gewöhnlich aus dem Vergleich seiner Berechnung der Endposition aus den mit dem Logg genau gemessenen Weglängen mit der astronomisch ermittelten Positionsdifferenz die Stromversetzung ableitet, kann man ebensogut aus der gegebenen Breitendifferenz die Gröfse der Längeneinheit oder der Geschwindigkeit ermitteln. Dieses Verfahren ist namentlich bei Flufsaufnahmen, aber auch bei guten Landwegaufnahmen sehr empfehlenswert und sichert bei richtiger Rechnung vor Konstruktionsfehlern. Wenn man von jedem Brechpunkt $a, b, c, \ldots$ einer Route auf den Meridian AM und eine dazu senkrechte Achse AS Senkrechten fällt, so erhält man jeden Punkt durch 2 Koordinaten, z. B. c durch cc' und cc'' bestimmt und der Meridianabstand des letzten Punktes e vom ersten, A, also deren Breitendifferenz ist:

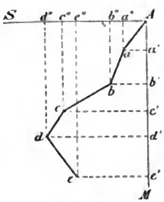


Fig. 94.

$$Ae' = Aa' + a'b' + b'c' + \cdots + d'e',$$

ebenso ist die Entfernung des Punktes e vom Meridian:

$$Ae'' = Aa'' + a''b'' + \cdots + d''e'',$$

worin alle rückwärts zurückgelegten Strecken negativ zu nehmen sind;

---

*) Der Punkt b'' ist im Bauche des ihn bezeichnenden Buchstabens liegend zu denken.

so z. B. ist die von d'' nach e'' gehende Bewegung gleich der negativen Länge $e''d''$. (Man kann ansetzen: $d''e'' = -e''d''$.)

Bezeichnet man die Winkel, welche die einzelnen Strecken

$$Aa = s_1, \; ab = s_2, \; bc = s_3, \; \ldots$$

mit dem Meridian bilden, mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$ und rechnet die α positiv, wenn der nach Süden gezogene Meridian den linken, das Routenstück den rechten Schenkel des Winkels bildet, sodafs also z. B. der zur Strecke de gehörige Winkel negativ zu nehmen wäre, so hat man:

$$Ae' = s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 + \cdots$$
$$Ae'' = s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3 + \cdots$$

Die Strecken s sind gemessene oder geschätzte Längen, die Winkel α mittels der Bussole bestimmt, es können also die einzelnen Summanden mittels der Logarithmentafel berechnet werden. Diese Rechnung kann aber erspart werden durch Anwendung der Koppeltafeln, die man in nautischen Handbüchern findet*) und welche für jede Hypotenusenlänge s von 0 bis 300 und jeden Dreieckswinkel α von 0^0 bis 45^0 von Grad zu Grad die Länge der beiden Katheten $s \cos \alpha$ und $s \sin \alpha$ geben. Mittels der Kurskoppelung kann man also die Koordinaten, d. h. die Breitendifferenz und die Abweichung vom Meridian für jeden beliebigen Brechpunkt (und wie man leicht sieht auch für jeden Zwischenpunkt) des Weges berechnen, indem man die Summe der $s \cos \alpha$, bez. $s \sin \alpha$ vom Anfangspunkt bis zu demselben bildet. Bezeichnet man jetzt den Anfangspunkt mit *0*, die Brechpunkte mit *1, 2, 3, ... n*, so erhält man die Koordinaten der einzelnen Punkte folgendermafsen:

$$y_0 = 0, \qquad x_0 = 0,$$
$$y_1 = s_1 \cos \alpha_1, \qquad x_1 = s_1 \sin \alpha_1,$$
$$y_2 = s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2, \qquad x_2 = s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2,$$
$$y_3 = s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3, \quad x_3 = s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3$$

und für einen beliebigen Punkt m:

$$y_m = s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + \cdots + s_m \cos \alpha_m,$$
$$x_m = s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \cdots + s_m \sin \alpha_m.$$

Wenn für einen Punkt, z. B. den n^{ten} die geographische Breitendifferenz gegen den Anfangspunkt *0* bestimmt ist, so ist damit Y_n im voraus (s. S. 125) gegeben. Wenn die aus der Koppelkursrechnung bestimmte Ordinate y_n hiemit nicht übereinstimmt, so schliefst man, dafs die Entfernungen nicht richtig geschätzt worden sind und der Quotient $Y_n : y_n$ ist der Faktor, womit alle y, also auch alle s und

*) Z. B. in Domcke, Nautische Tafeln, Taf. I u. II.

x multipliziert werden müssen, um richtig zu werden. — Wenn man als Einheit für die Schätzung der Strecken s die Zeitminute beibehält, so giebt obiger Faktor geradezu die Geschwindigkeit, d. h. die in der Minute zurückgelegte Strecke in Metern.

Hat man durch Multiplikation mit jenem Faktor alle x und y richtig gestellt, so trägt man die sämtlichen Punkte nach ihren Koordinaten auf; was am kürzesten, d. h. ohne alle Instrumente auf millimetrisch eingeteiltes Zeichenpapier geschieht.

c. Eine richtig aufgetragene Route dient nun als Basis für die **Einzeichnung von gepeilten Objekten**, d. h. solchen, die der Reisende unterwegs ihrer Kompafsrichtung nach bestimmt hat. Ist ein Objekt, z. B. eine Bergspitze von 2 Punkten der Route aus anvisiert, so brauchen nur die beiden Azimute von den Bildpunkten in der Karte aus aufgetragen zu werden, und ihr Schnitt giebt die Lage des Gipfels auf der Karte.

Ist dasselbe Objekt von mehr als 2 Punkten aus gepeilt, so sollten sich die sämtlichen in der Karte nach ihm gezogenen Richtungslinien in einem Punkte schneiden, was sie in der Regel, wegen der Unvollkommenheit der Aufnahme, nicht thun werden. Man nimmt dann den wahren Punkt in der Mitte der von den Richtungsstrahlen umschlossenen kleinen Fläche an. Stark abweichende Richtungen läfst man ganz aufser Rücksicht, wenn man annehmen kann, dafs eine Täuschung bezüglich der Identität des anvisierten Punktes möglich war. Um solche Täuschungen zu verringern ist es zweckmäfsig, wenn der Reisende bei jedem anvisierten Punkt eine wenn auch rohe Entfernungsschätzung angiebt. — Nahe, nur von einem Punkt sichtbare Objekte können ohnehin nur nach einer solchen Entfernungsangabe eingezeichnet werden.

Um Peilungen in die Karte eintragen zu können, ist nicht nötig, dafs sie gerade von Brechpunkten der Route aus genommen sind. Wenn ein Brechpunkt n um T Minuten später erreicht als der vorhergehende, m, verlassen worden ist und dazwischen, t Minuten nach dem Verlassen dieses letzteren, eine Peilung gemacht ist, so liegt der Punkt, von wo aus gepeilt wurde, auf der Verbindungsstrecke $mn = s$ um die Länge $\frac{s \cdot t}{T}$ von m entfernt.

Ist eine, wenn auch **rohe, Triangulierung** zwischen weithin sichtbaren Punkten der von einer Route durchzogenen Gegend vorhanden, so thut man immer besser, diese zuerst aufzuzeichnen und die Route nach den Peilungen zu orientieren, bez. zu reduzieren (s. S. 126). Solche Triangulierungen kann häufig der Reisende selbst ausführen, wenn er in Seitenabstechern Gipfelpunkte besteigt und auf ihnen

Winkel, ev. wahre Azimute mifst. Die Basis für eine solche Triangulation wird am leichtesten durch genaue Messung der Breitendifferenz zweier von einander sichtbaren, aber entfernten Orte und des Azimutes ihrer Verbindungslinie beschafft. Die Messung einer Basis mittels Mefsband oder Mefsstangen in einer Ebene und Anknüpfung vermittelst eines Basisnetzes an die Haupttriangulierung erfordert meist viel mehr Zeit und Mühe*).

D. Die schwierigste Aufgabe des Kartographen ist die Herstellung einer Karte durch **Zusammenverarbeitung verschiedenwertigen Materials**, herrührend von Beobachtern, die sich durch Vorbildung und Zuverlässigkeit, sowie durch Instrumente und Messungsmethoden unterscheiden. Für die Abwägung des relativen Wertes der Einzeldaten und ihre Kombination zu einem Gesamtresultat lassen sich keine allgemeingiltigen Regeln aufstellen. Bei der Ausführung dieser Arbeit hat der Kartograph vorzüglich Gelegenheit seine Kenntnisse, seinen Takt und seine Urteilskraft zu offenbaren. An trefflichen Mustern für solche kritisch-kombinatorische Kartographie haben wir gerade in Deutschland keinen Mangel. Es genügt hier die Namen Berghaus, Kiepert, Petermann, Hassenstein, Ravenstein zu nennen. In den „Originalkarten", wie sie z. B. Petermanns Mitteilungen von Zeit zu Zeit bringen und die sich noch heute ebenso wie früher durch ungemein vollständige Verarbeitung alles über das Gebiet vorhandenen Materials auszeichnen, steckt ein Aufwand von geistiger Arbeit, der von der Leserwelt in der Regel unterschätzt wird.

II. Reduktiver Teil.

Es giebt nur sehr wenige Karten, auf denen nicht ein Teil der Situation in das Netz der geometrisch konstruierten Punkte nach bereits vorhandenen Plänen, Skizzen, Handrissen einzuzeichnen wäre. Diese letztere Arbeit ist eine mehr oder weniger mechanische; selten

---

*) Über die Einrichtung und Ausführung geodätischer Arbeiten auf Reisen siehe das klassische Werk: D'Abbadie, Géodésie d'Éthiopie, Paris 1873. Die im vorstehenden Abschnitt behandelten Gegenstände findet man auch mehr oder weniger eingehend besprochen in den zur Instruktion von Reisenden dienenden Werken:

1) Hints to travellers ed. by the royal geographical society of London, 5th ed. 1883.
2) Neumayer, Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen, Berlin 1875.
3) Kaltbrunner, Manuel du voyageur, Zürich 1879.
4) Kaltbrunner, Der Beobachter. Übersetzung des vorigen von Kollbrunner, Zürich 1881.

ist es eine bloſse Kopie (ohne Maſsstabsveränderung), meist eine Reduktion auf anderen Maſsstab, öfters auch auf eine andere Projektion. Die Verkleinerung ist die bei weitem am häufigsten vorkommende Art der Maſsstabsänderung; Vergröſserung wird hauptsächlich bei der Herstellung von Wandkarten u. dgl. gebraucht.

Von den mechanischen Einrichtungen zum Kopieren und Reduzieren von Karten (photographischen und anderen) kann hier nicht die Rede sein.

A. Das **Kopieren** d. h. Abzeichnen ohne Maſsstabsänderung kann:

1. wenn es nur auf Übertragung einer gröſseren Anzahl einzelner Punkte ankommt, mittels Durchstechens (Pikieren) geschehen, wobei das Original auf das Zeichenpapier gelegt wird und alle Punkte mittels einer Nadelspitze durchstochen und so auf die Zeichenfläche übertragen werden. Hiebei wird natürlich das Original geschädigt.

2. Soll das Liniennetz eines Originals ohne Schädigung dieses letzteren übertragen werden, so bildet das einfachste Mittel das Durchzeichnen auf einer Glasplatte. Hiebei wird das Zeichenpapier auf das Original gelegt und beide dann auf einer Glasplatte (Kopierpult) befestigt, die man vor einem oberhalb verhängten Fenster in solche Neigung bringt, daſs die Umrisse gut durchscheinen und in bequemer Lage mit dem Zeichenstift nachgefahren werden können. Die Methode liefert um so bessere Resultate, je dünner und durchsichtiger die Zeichenpapiere sind.

3. Wo dieses Mittel unanwendbar ist, muſs man zum Durchbausen*) mittels Bausepapier oder Bauseleinwand seine Zuflucht nehmen, deren völlige Durchsichtigkeit ohne alle Lichteffekte die genaueste Nachfahrung jeder Zeichnung, die damit bedeckt wird, gestattet. Die Bause kann auf weiſses Papier aufgeklebt werden. Braucht man die Zeichnung aber auf einem bestimmten Zeichenpapierbogen, so muſs sie nochmals übertragen werden, was dadurch geschieht, daſs man die Bause auf der Rückseite mit Graphit schwärzt oder mit einem abfärbenden Papierblatt unterlegt, sodaſs nach Auflegen auf das Zeichenpapier beim Nachfahren der Umrisse diese auf jenem abgedrückt werden.

B. Das **Reduzieren,** d. h. Abzeichnen mit Verkleinerung (oder Vergröſserung) geschieht am zweckmäſsigsten

1. durch Quadratnetze (welche Methode ebensogut auch zum Kopieren ohne Maſsstabsänderung anwendbar ist).

Überzieht man die Oberfläche einer zu reduzierenden Original-

*) „Bausen" und nicht „Pausen"; denn das Wort kommt vom französischen ébaucher, aus dem Rohen arbeiten (von bauche, Strohlehm). Das heute gebräuchliche französische Wort ist jedoch calquer.

zeichnung mit einem fein ausgezogenen Quadratnetze von 2 bis 10^{mm} Seitenlänge, so hat es meist keine Schwierigkeit das in einem so kleinen Quadrate enthaltene Detail in irgend ein anderes kleineres oder gröfseres Quadrat in verkleinertem oder vergröfsertem Mafsstabe aus freier Hand zu übertragen.

Soll die Reduktion zum Original im Längenverhältnis von $m:n$ stehn, so hat man nur auf das Papier, welches die Reduktion aufnehmen soll, ein Quadratnetz zu zeichnen, dessen Seiten zu denjenigen des über das Original gezogenen im Verhältnis von $m:n$ stehn. Wäre z. B. ein im Mafsstabe von 1 : 200 000 gezeichnetes Kroquis auf den von 1 : 300 000 zu reduzieren, so wäre $m:n = 3:2$; man würde also z. B. das Original mit Maschen von 6^{mm}, das Papier der Abzeichnung mit solchen von 4^{mm} Weite bedecken. Die Enge des Originalnetzes richtet sich nach der Menge von Details, die vorhanden sind. Bei einzelnen besonders vollen Quadraten kann man durch Ausziehen der Diagonalen eine weitere Teilung in 4 Dreiecke vornehmen. Einzelne wichtigere Punkte innerhalb eines Quadrates kann man auch von dessen Ecken aus mittels eines Proportionalzirkels abstechen und übertragen.

Der Proportional- oder Reduktionszirkel ist bei diesen Arbeiten ein Instrument von grofser Brauchbarkeit. Er besteht im wesentlichen aus einem Zirkel, dessen beiden Schenkel über das Scharnier hinaus um gleiche Stücke verlängert sind und wieder in Spitzen endigen. Da bei jeder Zirkelöffnung um den Winkel α ähnliche Dreiecke ABS und $A'B'S$ entstehn, deren Seiten $AB:A'B'$ sich ebenso verhalten, wie die Schenkellängen $l:l'$, so erhält man jede zwischen AB abgegriffene Länge zwischen $A'B'$ im Verhältnis von $l':l$ verkleinert und umgekehrt jede zwischen $A'B'$ abgegriffene in AB im selben Verhältnisse vergröfsert. Um nun verschiedene und beliebige Verhältnisse $l:l'$ herstellen zu können, haben die beiden Zirkelschenkel einen Längsschlitz, worin bei geschlossenem Zirkel das Scharnier verschoben werden und auf verschiedene Abstände l und l' eingestellt werden kann. Die Zuverlässigkeit der Arbeit mittels des Instruments ist vor allem durch die unversehrte Erhaltung der 4 Zirkelspitzen bedingt. Der Proportionalzirkel findet seine Anwendung zunächst zur Konstruktion des Quadratnetzes. Hat man den Zirkel erst auf das richtige Verhältnis eingestellt, was durch eine neben dem Schlitz angebrachte Skale ermöglicht ist, so trägt man auf dem Original die Quadratseite in der gerade erforderlichen Länge auf zwei zu einander senkrechten Geraden so oft wie nötig mit dem



Fig. 95.

einen Spitzenpaar auf und braucht dann zur Einteilung der Reduktion nur den Zirkel umzukehren und mit dem anderen Spitzenpaar abzustechen.

Besonders bequem ist ferner der Reduktionszirkel zur Übertragung vereinzelter Punkte. Routen zwischen Hauptstationsorten pflegen meist ziemlich geradlinig zu verlaufen; zu ihrer Reduktion genügen oft einige wenige längs der Route gelegte Reihen von Quadraten. Die seitwärts gelegenen vereinzelten gepeilten Punkte braucht man nicht mit Quadraten zu bedecken, sondern kann sie mittels des Reduktionszirkels von je 2 Punkten des Quadratnetzes aus abstechen und übertragen.

Wenn die Originalzeichnung nicht mit Linien überzogen werden darf, so zieht man das Liniennetz auf Bausepapier, welches man fest auf das Original auflegt und befestigt. Sehr brauchbar ist hiebei das millimetrisch eingeteilte Bausepapier, dessen Einteilung benutzt wird und nur im Reduktionsverhältnis zu übertragen ist.

2. Das Reduzieren mittels des Pantographen (Storchschnabels) kann nur empfohlen werden, wenn ein sehr gutes Instrument dieser Art (im Preise von 200 bis 300 M.) zu Gebote steht und wenn es sich um Reduktion gröfserer sehr detaillierter Karten oder Pläne handelt.

Der Pantograph besteht aus einem in Scharnieren beweglichen Parallelogramm $PLGM$, dessen eine verlängerte Seite LG den Fahrstift F trägt, während der Zeichenstift Z auf der Seite GM so angebracht ist, dafs beide Stifte mit der durch P gehenden und in einer festen Unterlage (einem Bleiklotze) steckenden Drehungsachse des Instruments in einer Vertikalebene, auf der Zeichnung also in einer Geraden PZF liegen. Es ist leicht einzusehen, dafs, wenn sie bei einer einzigen Lage $PLGM$ des Parallelogramms in einer Geraden liegen, dies in jeder anderen Lage z. B. $PL'G'M'$ auch der Fall ist. Aus den ähnlichen Dreiecken FLP und FGZ folgt nämlich, dafs:

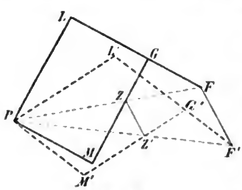


Fig. 96.

$$FG : FL = GZ : LP.$$

Da beim Übergang in die zweite Lage die Längen dieser Linien alle unverändert bleiben, so besteht die Proportion auch für die gestrichenen Buchstaben; es sind also auch $F'L'P$ und $F'G'Z'$ ähnliche Dreiecke, d. h. Z' liegt auf PF'. Es ist also auch, wenn man F mit F' und Z mit Z' verbindet:

$$LG : LF = PZ : PF = PZ' : PF' = ZZ' : FF',$$

d. h. der Zeichenstift Z zeichnet jede Länge, die der Fahrstift F nachführt, im Verhältnisse von $LG : LF$ verkleinert. Indem man die Schiene GM längs LF und PM verschiebt, läfst sich jedes beliebige Reduktionsverhältnis $u : v$ herstellen, indem man an den auf LF und PM angebrachten Mafsstäben G (bez. M) so einstellt, dafs

$$LG : LF = u : v$$

und dann den Zeichenstift Z auch so anbringt, dafs

$$MZ : MG = u : v.$$

Um mit dem Instrument zu arbeiten wird zunächst das Original so gelegt, dafs man bei festgestellter Drehachse des Instruments die ganze Zeichnung umfahren kann; dann wird zwischen dem Original und der Instrumentachse in gleicher Orientierung der Zeichenbogen festgelegt, der die Reduktion aufnehmen soll, worauf die Arbeit des Nachfahrens aller Linien des Originals mit dem Fahrstift beginnen kann.

Es giebt einige nicht im geometrischen Prinzip, aber in der konstruktiven Ausführung abweichende Pantographen. Obige Darstellung bezieht sich zunächst auf die neuerdings vorzugsweise benutzten Instrumente von Ott und Coradi in Kempten.

C. Reduktion mit Projektionsänderung kommt fast immer vor, wenn Übersichtskarten ausgedehnter Gebiete durch Reduktion von Spezialkarten seiner einzelnen Teile hergestellt werden sollen. Nur wenn die Projektionen der Übersichtskarte sowohl wie der Spezialkarten sämtlich winkeltreu sind, kann die Reduktion, indem der Mafsstab an jeder Stelle besonders bestimmt und berücksichtigt wird, ohne geometrische Verzerrung erfolgen, allein in den bei weitem meisten Fällen hat man die verkleinerte Kopie wenigstens gegen den Kartenrand hin in verschobene Gradtrapeze einzutragen. An die Stelle der hier nicht anwendbaren Quadratnetze tritt jetzt das Gradnetz selbst ein. Zieht man dasselbe recht engmaschig aus, so wird man das Gebiet im Urbild und Abbild in so kleine Vierecke einteilen können, dafs es keine Schwierigkeit mehr hat, aus freier Hand die Einzelumrisse des Vorbilds in die verschobenen Viereckchen der Verkleinerung einzuzeichnen, wobei man je nach Bedürfnis auch die Diagonalen der Vierecke noch als Hilfseinteilung benutzen kann. Die nötige Verschiebung ergiebt sich dann von selbst.

Zweites Kapitel:

Terraindarstellung*).

I. Darstellung durch Isohypsen.

Der Situationsentwurf, d. h. die Projektion aller Punkte der Erdoberfläche auf eine Horizontalebene läfst völlig im unklaren über den Abstand dieser Punkte von der Projektionsebene; kann also auch keine Vorstellung geben von den Formen des Terrains. Eine solche würde nur durch körperliche Nachbildung, wie sie die Reliefkarten anstreben, erreicht werden können. Diese bleiben aber hier aufser betracht. Ausgezeichnete Linien und Punkte des Terrains wie scharfe Berggräte, Plateauränder, Gipfel u. s. w. können zwar so gut wie jede andere Linie, bez. jeder andere Punkt in dem Situationsentwurf wiedergegeben werden, allein ihre Bedeutung für die Bodengestaltung wird dadurch noch nicht ersichtlich. Das einfachste Mittel um die Höhenverhältnisse des dargestellten Gebietes kenntlich zu machen, wäre, bei möglichst vielen Punkten die Höhe über dem Meereshorizont beizuschreiben. Dieses Mittel wird sowohl bei Landkarten, namentlich aber bei Seekarten (für die Tiefendarstellung) in ausgiebiger Weise angewandt, hat aber den Nachteil, dafs man nur durch mühsames Lesen und Vergleichen vieler Zahlen eine Vorstellung von den Höhenverhältnissen gewinnen kann; denn was den Beschauer einer Karte interessiert, sind meistens weniger die absoluten Höhenverhältnisse, als der Zusammenhang und Übergang zwischen Höhen und Tiefen, mit einem Wort die Neigungsverhältnisse des Terrains.

A. Die charakteristischen Linien des Terrains. 1. An jedem Punkte des Terrains zeichnen sich 2 aufeinander senkrechte Richtungen bezüglich ihrer Neigungsverhältnisse vor allen anderen aus: das sind die Richtung stärkster Neigung gegen die Horizontalebene, also die Richtung, welche freifliessendes Wasser nehmen würde, und die Richtung geringster Neigung, die Richtung, in

*) Die Terraindarstellung ist in sehr zahlreichen Schriften, namentlich von militärischen Schriftstellern, behandelt. Eine der neusten und vollkommensten ist: V. von Streffleur, Allgemeine Terrainlehre. Wien 1876.

welcher man sich im Terrain fortbewegen kann, ohne an Höhe einzubüfsen noch zu gewinnen, die Horizontale. Die Einzeichnung dieser Richtungen, oder auch nur einer derselben, an möglichst vielen Stellen der Karte würde schon guten Aufschlufs über den Verlauf des Terrains bieten. Man wählt zur Eintragung von einem gegebenen Punkte aus die Richtung der geringsten (nullgleichen) Neigung, weil sie die Gesamtheit aller Punkte des Terrains verbindet, die in gleicher Höhe über dem Meereshorizont liegen; man nennt eine nach diesem Gesetze gezogene krumme Linie eine Horizontale oder Isohypse. Wird eine solche Linie mit der Zahl bezeichnet, die ihre Höhe über dem Meere angiebt, so giebt ein einziger Blick auf die Karte eine Übersicht über alle Punkte, welche diese Höhe haben, denn sie eben bilden diese krumme Linie.

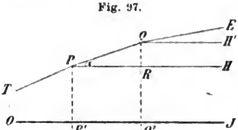
Man weifs aber auch, dafs überall die Richtung des stärksten Falls senkrecht auf dieser Linie steht. Wenn noch eine oder mehrere benachbarte Horizontalen, die höhere oder tiefere Punkte mit einander verbinden, eingezeichnet sind, so kann man auch sofort angeben, nach welcher Richtung Steigung, nach welcher Fall stattfindet. Ein System von Isohypsen ist also ein gutes Mittel, um eine geometrische Vorstellung von der Terrainform zu verschaffen. Man giebt zu diesem Zweck den Isohypsen gleiche Vertikalabstände, mit anderen Worten, man denkt sich das Terrain geschnitten von einem System von Horizontalebenen, die von der Meeresfläche den Abstand von n, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, ... Meter haben. Die Schnittlinien mit der Terrainoberfläche sind die äquidistanten Horizontalen oder Isohypsen. Abgesehen von dem schnellen Überblick, den dieselben, wenn sie in die Karte eingezeichnet sind, von den Punkten gleicher Höhe gewähren, haben sie noch andere Eigenschaften, die ihren Wert beträchtlich erhöhen. Vor allem läfst ihre Gestalt die allgemeine Form des Terrains alsbald überschauen. Wenn z. B. eine Bergkuppe vorhanden ist, so schneidet diejenige Isohypse, deren Höhe der Gipfelhöhe möglichst nahe kommt, eine kleine Kuppe des Berges ab, umgiebt also als geschlossene Kurve den Punkt, der den Gipfel darstellt. Die nächst niedrigere Isophypse umgiebt wieder die vorherige in einer weiteren Kurve u. s. w. Bildet dagegen das Terrain eine lang hingestreckte Kette mit einem geradlinigen Kamm von gleichförmiger Höhe, so erscheint die Kammlinie im Bilde beiderseits begleitet von ihr annähernd parallel verlaufenden Isohypsen; Einknickung der Isohypsen gegen den Bergkörper zeigt eine Schlucht, ein Thal an, Ausbiegung derselben einen Bergvorsprung u. s. w.*)

*) Eingehendere Betrachtungen über die Abhängigkeit des Isohypsen- und

2. Die zur Isohypse senkrechte Richtung zeigt, wie schon gesagt, die gröfste Neigung an, und eine der wichtigsten Eigenschaften derselben ist, dafs die längs einer solchen Linie gröfsten Falls gemessene Entfernung zweier Isohypsen den Neigungswinkel erkennen läfst. Diese Eigenschaft ergiebt sich aus der Betrachtung des Profils.

Unter einem Profil versteht man die Durchschnittslinie des Terrains mit einer Vertikalebene. Die Wiedergabe von Profilen im verkleinerten Mafsstabe bildet ein wichtiges Mittel zum Verständnis des Terrains. Durch jeden Punkt der Erdoberfläche gehen unendlich viele Vertikalebenen; wählt man darunter diejenige aus, in welcher die Richtung stärksten Falls liegt, so giebt die Neigung der Profillinie gegen die Horizontalebene geradezu die gröfste Neigung des Bodens im betrachteten Punkte. Ist P Fig. 97 dieser Punkt, PQ ein kurzes Stück des Profillinie, PH eine Horizontale durch P, so ist α der Neigungswinkel des Terrains oberhalb P. Ist QH' eine Horizontalebene durch Q und QR eine Senkrechte, so ist:

Fig. 97.



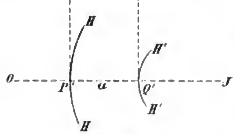


Fig. 98.

$$\operatorname{tg} \alpha = QR : PR.$$

Die Profilebene schneidet den Meereshorizont in einer Geraden OJ und diese Gerade ist in der Karte das Bild der Profillinie. Um die Bildpunkte einzelner Punkte P und Q des Profils zu finden hat man diese durch Senkrechte PP' und QQ' zu projizieren. $P'Q'$ ist also das Kartenbild der Terrainstrecke PQ. Die Isohypsen durch P und Q stehn aber senkrecht auf der Linie der stärksten Neigung PQ, folglich senkrecht auf der Profilebene, und da diese als Horizontalkurven sich unverändert auf die Kartenebene abbilden, so wird auch die Gerade OJ in P' und Q' senkrecht von den Isohypsen geschnitten, sodafs also der Grundrifs sich so darstellt wie Fig. 98, wo HH und $H'H'$ Stücke der durch P' und Q' gehenden Isohypsen sind. Demnach ist $P'Q' = PR$ der in der Karte gemessene kürzeste Abstand der zwei Isohypsen. Nennt man diesen a, die Höhendifferenz QR der beiden Isohypsen e, so ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = e : a.$$

Bergstrichbildes von der Terrainbeschaffenheit findet man in den Anleitungen zum militärischen Aufnehmen z. B. in Biebrach, Der Fähnrich als Topograph. Berlin 1874, S. 60—80. — Vgl. auch die Terrainstudie: Uzielli, Alcune osservazioni orografiche e idrografiche. Boll. della società geogr. italiana, 1883 p. 559.

Sind die Horizontalen äquidistant und ist e ihr Abstand, die sogenannte Äquidistanz, so hat diese Gröfse im ganzen Gebiete der Karte einen unveränderlichen ein für allemal festgesetzten Wert, die Tangente des Neigungswinkels ist also überall umgekehrt proportional dem Abstand a der Isohypsen. Um das sichere Ablesen der Neigungsverhältnisse aus einer Isohypsenkarte zu ermöglichen und die jedesmalige Ausrechnung obiger Formel zu ersparen, entwirft man einen Böschungsmafsstab. Man legt zu diesem Zwecke an eine Linie AB die Winkel 5^0, 10^0, 15^0 u. s. w. an, trägt dann auf der Senkrechten AC den Schichtenabstand e im Mafsstab der Karte auf und zieht dann durch C eine Parallele zu AB. Die Abstände der Schnitt-



Fig. 99.

punkte 5, 10, 15, ... von C sind die Isohypsenabstände, welche den Neigungswinkeln 5^0, 10^0, 15^0, ... entsprechen. Genauer erhält man den Böschungsmafsstab, wenn man aus obiger Formel den Wert von a für die Winkelwerte 5^0, 10^0, 15^0, ... berechnet und von C aus aufträgt. Um die Neigung an irgend einer Stelle der Karte zu bestimmen, nimmt man den Abstand der beiden benachbarten Isohypsen in den Zirkel, setzt ihn im Punkte C des Mafsstabs ein und liest an der anderen Spitze den Neigungswinkel ab, wobei man die Abweichung von einer der durch 5 teilbaren Gradzahlen nach dem Augenmafs auf einzelne Grade genau schätzt.

B. Es bleibt noch zu zeigen übrig, wie nach dem von der Aufnahme direkt gelieferten Material die **Isohypsenkonstruktion** ausgeführt wird. Die Aufnahme liefert eine gröfsere Anzahl von über das darzustellende Terrain verteilten Höhenpunkten. Die Verwendbarkeit derselben zur Konstruktion der Isohypsen hängt nicht nur von ihrer Zahl, sondern namentlich von ihrer Auswahl ab, die dem Aufnehmenden obliegt. Da eine Ebene durch 3 Punkte oder durch eine Gerade und einen Punkt bestimmt ist, so ist es ganz überflüssig in einer Fläche von ganz gleichförmiger Neigung mehr als 3 Punkte zu bestimmen, vielmehr kommt alles darauf an, die Grenzlinien und Eckpunkte der Terrainteile, d. h. die Linien und Punkte, in welchen eine ebene Fläche von bestimmter Neigung an andere von verschiedener Neigung anstöfst, festzulegen. Man nennt sie die Brechungslinien und Brechungspunkte des Terrains. Sie bilden die Kanten und Ecken des ungeheuer vielflächigen Polyeders, als welches man die Erdober-

fläche auffassen kann. — An Stellen gleichförmig sich krümmender Terrainoberfläche ohne eigentliche Brechlinien sollen die Höhenpunkte vorzugsweise längs den Linien stärksten Falls angeordnet sein.

Sind alle Eckpunkte des Polyeders, d. h. alle Brechpunkte des Terrains in die Karte eingetragen und ihre Höhe über dem Meeresspiegel gemessen, so ist es eine höchst einfache geometrische Operation, die Lage von Zwischenpunkten beliebiger Höhe anzugeben.

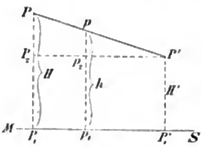


Fig. 100.

Sind P und P' (Fig. 100) Punkte in der Grenze einer Polyederfläche, d. h. eines gleichförmig geneigten Terrainstücks und ist diese Figur in der durch P und P' gelegten Profilebene entworfen, sind ferner H und H' die diesen Punkten zugehörigen Meereshöhen, so liegt die gerade Verbindungslinie PP' im Terrain und es läfst sich sofort auf ihrer Darstellung in der Karte der Punkt p angeben, der eine gewünschte zwischen H und H' liegende Höhe h besitzt. Projiziert man nämlich die Punkte auf den Meeresspiegel MS, so erhält man in $P_1 p_1 P'_1$ die Lage der Punkte, wie sie in der Karte, nur im Mafsstabsverhältnis verkleinert, erscheinen.

Ist der Abstand der Punkte in der Karte:

$$P_1 P'_1 = P_2 P' = D, \qquad P'_1 p_1 = P' p_2 = d,$$

so ergeben die Dreiecke $PP'P_2$ und $pP'p_2$:

$$d = D \cdot \frac{h - H'}{H - H'}.$$

Auf diese Weise bestimmt man auf der Verbindungsgeraden zweier benachbarten Punkte, deren Höhen gemessen sind, die Durchschnitte der zwischenliegenden Isohypsen, indem man für h in obige Formel nacheinander die Seehöhen derjenigen Isohypsen einsetzt, die zwischen H und H' liegen. Wäre z. B. $H = 473^m$, $H' = 448^m$ und sollten die Isohypsen von 10 zu 10^m eingezeichnet werden, so gehn zwischen beiden Punkten die Isohypsen 450, 460, 470 hindurch; man hat also

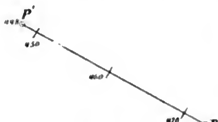


Fig. 101.

dem h nacheinander diese 3 Werte zu erteilen und erhält dann die Abstände d_1, d_2, d_3 von P', in denen die Verbindungslinie PP' von diesen 3 Horizontalen getroffen wird, wie Fig. 101 zeigt. Die Abstände von P' aus gerechnet haben hier die Verhältnisse:

$$d_1 : d_2 : d_3 : D = 2 : 12 : 22 : 25.$$

Um Strecken von beliebigen Längen in gegebenen Verhältnissen

teilen zu können, wie es hier erforderlich ist, giebt es mechanische Mittel. Das einfachste derselben bietet das millimetrisch eingeteilte Bausepapier. Numeriert man die Centimeterlinien mit 0, 10, 20, 30, . . .

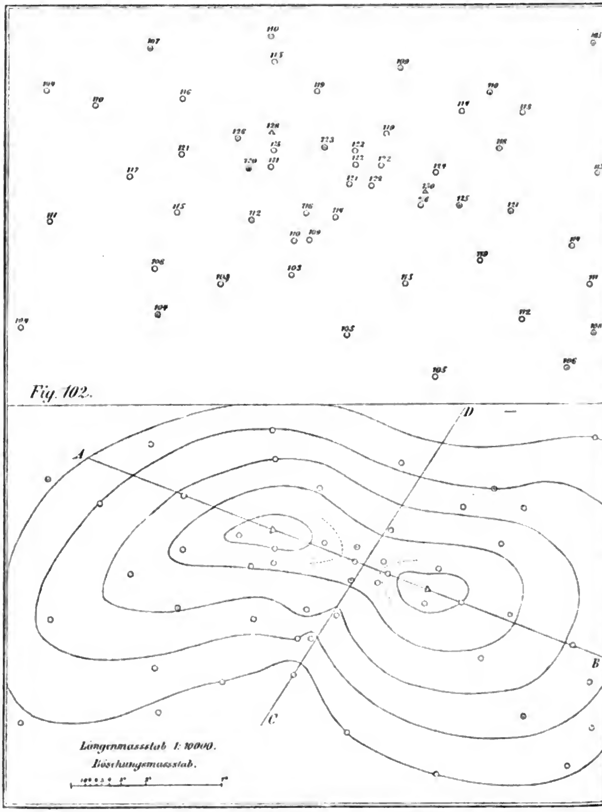


Fig. 102. Isohypsenkarte.

so wird jede Gerade, die auf der Millimeterlinie 48^{mm} beginnt und auf 73^{mm} endigt, durch die zwischenliegenden drei Centimeterlinien im oben verlangten Verhältnis geschnitten. Man hat also nur das Bause-

papier so lang zu drehen, bis P' auf die Linie 48, und gleichzeitig P auf 73 zu liegen kommt, und dann mit Nadel oder Stift die Schnittpunkte der Geraden PP' mit den Linien 50, 60, 70 durchzudrücken. Bei der Ausführung solcher Konstruktionen hat man sich nur stets zu vergewissern, dafs die beiden Punkte auch wirklich demselben ebenen Terrainstück angehören, dafs zwischen ihnen keine Ungleichförmigkeiten der Neigung mehr vorkommen.

Wenn zwischen allen im Terrain bestimmten Höhepunkten auf der Karte die Durchschnitte der Isohypsen bezeichnet sind, so verbindet man diese Durchschnittspunkte durch stetig verlaufende Kurven und erhält so das fertige Isohypsenbild.

Bei der Anwendung dieser Grundsätze auf die Darstellung des Meeresbodens in Seekarten erhält man die Isobathen oder Linien gleicher Tiefe.

Beifolgende Figur 102 zeigt oben ein Netz von Höhenpunkten und darunter seine Benutzung zur Isohypsenkonstruktion im Mafsstabe von 1 : 10 000. Während im allgemeinen die Isohypsen von 5 zu 5^m ausgezogen sind, ist zwischen den beiden Kuppen noch je ein Stück der beiden Isohypsen von $122{,}5^m$ punktiert eingeschoben.

Zur Verdeutlichung sind die Profile (Fig. 103) beigefügt, ein Längsprofil AB über beide Kuppen und ein Querprofil CD über den Sattel,

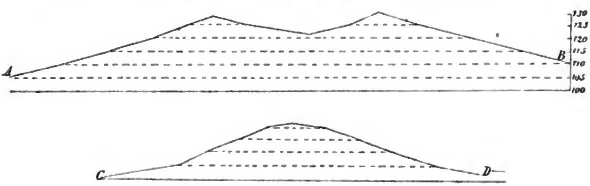


Fig. 103.

längs der südwärts herabgehenden Schlucht. Die Höhen (über 100^m) sind im fünffachen Mafsstabe der Längen, also in 1 : 2000 aufgetragen, um die Höhenunterschiede stärker zu markieren. Der Böschungsmafsstab gestattet in der Karte alle Neigungen zu bestimmen.

II. Bezeichnung der Höhenverhältnisse durch Farbentöne oder Schattierung.

A. Höhenschichtenkolorit. Die Isohypsenkarte erfordert zur Entzifferung immer eine gewisse Zeit und ist in wenig geneigtem Terrain selbst für den Geübten nicht übersichtlich genug. Um die Übersicht rascher zu ermöglichen werden deshalb oft verschiedene

Höhenstufen mit verschiedenen Farben oder Abstufungen einer Farbe angelegt. Dies geschieht mit Vorteil namentlich in Übersichtskarten von nicht zu grofsem Mafsstabe (1 : 100 000 bis 1 : 1 000 000). Die Farbenfolge wird entweder beliebig nach dem persönlichen Geschmack des Autors gewählt, wie z. B. in Papens Höhenschichtenkarten von Zentraleuropa in 1 : 1 Mill., oder nach bestimmten Gesichtspunkten. Von Hauslab empfiehlt, die tieferen Stufen möglichst hell zu halten und nach oben dunklere Töne anzuwenden, sodafs die tiefsten Farben auf die unkultivierten teilweise unzugänglichen Berghöhen fallen und im stärker bebauten Flachland das dort notwendig reichere Detailbild auf hellem Grund deutlich lesbar bleibt. Die Farbenfolge ist gewöhnlich: weifs, gelb, braun, grün, dunkelgrau mit den Übergangsstufen. Man findet sie besonders in Steinhausers hypsometrischen Karten durchgeführt. Doch auch das entgegengesetzte Prinzip findet man angewandt; am geschmackvollsten vielleicht in Karten von Leuzinger, die mit einem sehr durchsichtigen grüngrauen Tiefenton beginnen und durch grünbräunliche und gelbliche Töne bis zum Weifs emporsteigen. — Die ausdrucksvolle hypsometrische Übersichtskarte der Zentralkarpathen des militärgeographischen Instituts in Wien befolgt in der tiefern Region das Hauslabsche, in der höheren das andere Prinzip.

B. Bezeichnung des Neigungswinkels durch Schattentiefe. Zur Erzielung rascher Lesbarkeit einer Terrainkarte ist aber kein Verfahren geeigneter als dasjenige, die Neigung des Bodens an jeder Stelle durch die Tiefe einer Schattierung kenntlich zu machen. Die Behandlung solcher Karten pflegt sich an den physikalischen Satz anzulehnen, dafs eine Ebene von einer gegebenen Lichtquelle (etwa der Sonne) um so stärker beleuchtet wird, je kleiner der Winkel der auffallenden Strahlen mit der Normalen der Ebene ist. Denkt man sich z. B. die Sonne senkrecht über dem kartographisch dargestellten Gebiete stehn, so würden nur die Horizontalebenen volle Beleuchtung erhalten, die geneigten Flächen aber in dem Mafse schwächer beleuchtet erscheinen, wie sie steiler gegen den Horizont geneigt sind. Eine Karte, welche diese Beleuchtungsunterschiede in kräftigem Ausdruck wiedergiebt, mufs reliefartig wirken und läfst die Orte geringerer und stärkerer Neigung, also leichterer und schwierigerer Zugänglichkeit beim ersten Blick überschauen. Deshalb ist diese Art der Terraindarstellung auf Militär- und Touristenkarten stets bevorzugt worden.

Die Ausführung der Schattierung kann in verschiedener Manier erfolgen.

1. Die Tuschmanier läfst sich, wo es auf sehr grofse Genauig-

keit nicht ankommt, von einem gewandten Zeichner sehr rasch ausüben. Es wird mit dem Pinsel ein brauner oder grauer Ton aufgesetzt, nach den Gegenden abnehmender Neigung hin verwaschen, an steileren Stellen mehrfach aufgetragen. Auch bei geringerer Übung kann leicht ein gefälliges Bild erzeugt werden. Die Manier empfiehlt sich für Spezialkarten nur dann, wenn durch ein genaues Isohypsennetz alle Zweifel über die absoluten Höhenverhältnisse vermieden sind, wie z. B. in den zum Generalstabswerk über den deutsch-französischen Krieg gehörigen Spezialkarten. Sie ist aber sehr zweckmäfsig, um in nicht zu grofsem Mafstab einen ungefähren Begriff von einem Terrain zu geben.

2. Die Horizontalschraffenmanier. Denkt man sich auf einer Isohypsenkarte den Zwischenraum zwischen 2 Isohypsen durch gleichabständige Höhenschichten noch weiter zerlegt, so würden Zwischenisohypsen entstehen, welche auf der Karte den Raum zwischen den beiden ursprünglichen durchziehen. Da der Isohypsenabstand an steilen Stellen geringer, an minder steilen gröfser ist, so wird, wenn nur genügend viele Zwischenstufen eingeschaltet werden, die durch die Linien bewirkte Schattierung bereits den gewünschten Eindruck hervorbringen, der dadurch erhöht werden kann, dafs an steileren Böschungen die Strichbreite verstärkt wird. Die Schwierigkeit einer durchaus befriedigenden Durchführung dieser Manier und die geringe Übersichtlichkeit bei schwachen Neigungen haben eine weite Verbreitung derselben verhindert. Ein treffliches Beispiel ihrer Anwendung bieten die Norwegischen Amtskarten in 1 : 200 000.

3. Bei weitem am meisten Anwendung findet die Vertikalschraffenmanier, die ihre wissenschaftliche Ausbildung in den Schlufsjahren des vorigen Jahrhunderts durch den sächsischen Major Lehmann erhalten, seitdem aber je nach der Anwendung auf Flachland, Mittel- oder Hochgebirge verschiedene Modifikationen erfahren hat. Der Einfall des Lichts wird senkrecht von oben vorausgesetzt. Die Schattierung wird durch Striche hervorgebracht, die in der Richtung gröfsten Falls gezogen werden und stets in gleicher Anzahl einen bestimmten Raum erfüllen. Durch Änderung des Verhältnisses zwischen Strichbreite und Zwischenraumsbreite, also zwischen Schwarz und Weifs, kann jede beliebige Schattenabstufung streng hergestellt werden. Lehmann verzichtete auf Darstellung des Terrains von mehr als 45° Neigung, welches er als militärisch unbrauchbar betrachtete, und liefs von 45° an volle Schwärze eintreten.

Die Zwischenstufen schattierte er nach dem Gesetze, dafs eine Neigung von n^0 durch ein Verhältnis von Schwarz zu Weifs wie $n^0 : (45 - n)^0$ dargestellt werden sollte. Der besseren Unterscheidbar-

keit halber machte er aber 9 Stufen von je 5°, wie sie die am Schlusse folgende Tafel zeigt.

Der Wunsch die Neigungsskala leichter lesbar zu machen veranlafste den General Müffling unter Festhaltung der geometrischen Grundlage die einzelnen Stufen noch durch die Gestalt der Striche zu unterscheiden; er führte punktierte, geschlängelte und abwechselnd dicke und dünne Striche ein und liefs die Beleuchtungsgrenze erst bei 50° eintreten, sodafs 10 Stufen vorhanden sind. Für die preufsische, jetzt auf ganz Deutschland ausgedehnte Generalstabskarte in 1 : 100 000 kommt eine aus der Lehmannschen und Müfflingschen kombinierte Stufenleiter zur Anwendung, die namentlich für das Bedürfnis im Flachland noch um eine Stufe für 1° Neigung vermehrt ist. Dagegen haben Baiern und Österreich für das Bedürfnis im Hochgebirge die volle Schwärze bis 60°, bez. 80° hinaufgeschoben. Die am Schlusse beigegebene Tafel enthält eine Zusammenstellung der 5 verschiedenen Skalen. Das Verhältnis von Schwarz zu Weifs ($S : W$) für jede Stufe ist bei drei derselben beigeschrieben.

Die Auszeichnung einer Terrainkarte ist erst dann völlig bestimmt, wenn noch vorgeschrieben ist, wieviel Striche auf ein Centimeter nebeneinander zu ziehen sind. Diese Zahl richtet sich nach dem Mafsstab der Karte und ist kleiner für gröfsere Mafsstäbe bis zu einer Maximalskala, gröfser für kleinere bis zur Minimalskala. In den Zeichenvorschriften der verschiedenen topographischen Büreaux ist die Strichzahl für jeden Mafsstab genau festgesetzt. — Die Länge der Striche richtet sich gleichfalls nach dem Mafsstab und geht meist von einer Isohypse bis zur anderen, sodafs diese Linien die einzelnen Strichlagen voneinander trennen. — Schraffierung ohne Grundlage eines Isohypsennetzes entbehrt der erforderlichen Strenge, doch wird in vielen neueren Generalstabskarten das Isohypsennetz nach seiner Verwertung zur Terraindarstellung nicht in die zu publizierenden Blätter eingestochen.

4. Die Schraffen- (und Tusch-)manier bei schiefer Beleuchtung hat früher, namentlich in französischen und italienischen Karten, mehr Anwendung gefunden als gegenwärtig. Unter den neueren gröfseren Kartenwerken bietet die Dufoursche Karte der Schweiz in 1 : 100 000 wohl das einzige, allerdings künstlerisch unübertreffliche Beispiel ihrer Anwendung. Es liegt der geometrische Grundgedanke vor, das Lehmannsche Prinzip der Schraffierung auszuführen, während die Sonnenstrahlen nicht senkrecht sondern unter 45° Neigung aus Nordwesten einfallen, sodafs also die Schattentiefe nicht nur von der Neigung, sondern auch von der Orientierung des darzustellenden Gehänges abhängen. Da man aber meist noch die

Forderung stellte, dafs Horizontalebenen weifs bleiben, dagegen nach Nordwest gekehrte Hänge von 45° Neigung in der Karte nicht ganz weifs gelassen werden sollen, so forderte jenes Prinzip Ausnahmen, die mehr oder weniger der Diskretion des Zeichners anheimgegeben sind und die Darstellung der Strenge berauben. Vorzüglich geeignet ist aber die Methode zur Anwendung auf generalisierende Darstellungen in kleinerem Mafsstab*).

Erst in neuester Zeit hat H. Wiechel dieser Terraindarstellung eine mathematisch strenge Unterlage gegeben und eine Zeichenschule dafür entworfen**). Wenn erst die notwendige geometrische Konsequenz schiefer Beleuchtung rückhaltlos angenommen wird, dafs nämlich die Horizontalebenen nicht weifs, sondern schattiert erscheinen müssen, so läfst sich unschwer die Helligkeit jeder Fläche, deren Neigung gegen den Horizont und deren Orientierung gegen den einfallenden Lichtstrahl gegeben sind, berechnen. Die Böschung der Fläche, d. h. ihr Winkel gegen die Horizontalebene sei φ; denselben Winkel bildet die auf der Fläche errichtete Normale mit der Lotlinie, der Vertikalen. Der Winkel, den der auffallende Lichtstrahl mit der Normale der Fläche bildet, werde wie in der Optik gebräuchlich mit e (Einfallswinkel) bezeichnet. Der Einfallswinkel gegen die Horizontalebene d. h. der Winkel zwischen der Vertikalen und dem Lichtstrahl sei $= a$. Denkt man die 3 Richtungen der Vertikalen (V), der Flächennormale (N) und des Lichtstrahls (L) durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegt, deren Radius $= 1$ ist, so schneiden sie die Kugeloberfläche in 3 Punkten V, N, L. Verbindet man diese durch gröfste Kreisbogen der Kugel, so mifst der Bogen VN den Winkel φ, VL den Winkel a und NL den Winkel e. Der Winkel des sphärischen Dreiecks bei V ist derjenige, den die auf der gegebenen Fläche senkrecht stehende Vertikalebene (d. h. die durch V und N gelegte Ebene) mit derjenigen Vertikalebene bildet, in welcher der Lichtstrahl auf die Horizontalebene fällt (d. h. mit der durch V und L gelegten Ebene).

Nennt man diesen Winkel δ, so giebt die bekannte Cosinusformel des sphärischen Dreiecks:

$$\cos e = \cos a \cos \varphi + \sin a \sin \varphi \cos \delta.$$

*) Zur Terraindarstellung überhaupt vgl. den kritischen Artikel von Sydow, 3 Kartenklippen, im Geogr. Jahrbuch I (1866) 348. An denselben schliefst sich eine bis damals vollständige Tabelle aller europäischen Spezialkartenwerke an, mit allen nötigen Angaben über Mafsstab, Blattzahl, Darstellungsmanier u. s. w.

**) H. Wiechel, Theorie und Darstellung der Beleuchtung von nicht gesetzmäfsig gebildeten Flächen mit Rücksicht auf die Bergzeichnung. Der Civilingenieur Bd. 24 (1878), S. 335 und Tafel XVII—XIX.

Nimmt man an, dafs das Licht unter 45^0 gegen die Horizontalebene einfällt, so ist $a = 45^0$, folglich:

$$\cos a = \sin a = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707.$$

Kommt das Licht aus Nordwest, so ist der Stellungswinkel δ von Nordwest aus zu zählen, am besten rechts herum von 0 bis 360^0. — Die Helligkeit H einer Fläche ist proportional dem Cosinus des Einfallswinkels, und kann ihm gleich, $H = \cos e$, gesetzt werden. Sie ist am gröfsten bei senkrechtem Einfall, also wenn $e = 0$; dann wird der $\cos e = 1$; am kleinsten, nämlich $= 0$, wenn $e = 90^0$, also die Lichtstrahlen parallel der Fläche gehn. Sie bleibt aber auch $= 0$ für alle Flächen, die gar nicht mehr von den Lichtstrahlen getroffen werden, also im Schlagschatten liegen. Die Formel für die Helligkeit ist also:

$$H = 0{,}707 (\cos \varphi + \sin \varphi \cos \delta),$$

ist also von der Böschung φ und der Orientierung der Fläche, d. h. dem Stellungswinkel δ abhängig.

Die untere Hälfte der am Schlusse dieses Buches beigegebenen Tafel bietet nun eine Schattenskala, auf welcher man für jede Böschung und jeden Stellungswinkel eines Flächenstücks den Schwärzegrad entnehmen kann. Eine solche Skala mufs für jeden Mafsstab der Karte und für jede Schichthöhe (Äquidistanz) eigens konstruiert werden. Die ausgezogenen Linien sind Isophoten, d. h. Linien gleicher Helligkeit, zu deren Konstruktion aus vorstehender Gleichung Wiechel ausführliche Anleitung giebt. Für den vorliegenden Fall ist eine Schichthöhe von 4^{mm} angenommen. Um die Skala zur Schattierung eines Flächenstücks einer Isohypsenkarte zu benutzen, bestimmt man erst mit dem Transporteur den Stellungswinkel der Gefälllinie an der betreffenden Stelle d. h. ihren Winkel mit der Nordwestrichtung; dann nimmt man den kürzesten Abstand zweier Isohypsen daselbst in den Zirkel, setzt den einen Fufs in den Mittelpunkt der Figur ein und den andern in diejenige Richtung, welche mit der Nordwestrichtung den eben gemessenen Winkel bildet. Man kann zu diesem Zwecke erst ein Lineal vom Mittelpunkt nach dem betreffenden Teilpunkte der am Aufsenrand angebrachten Gradeinteilung anlegen. Die Schattentiefe an der äufseren Zirkelspitze ist die gesuchte. In der Figur sind 10 Helligkeitsabstufungen gemacht. Ganz schwarz ist nur der Raum gelassen, welcher gar keine Lichtstrahlen empfängt, wie z. B. die nach Südost gekehrten Flächen von mehr als 45^0 Böschung. Derselbe ist von der Isophote $H = 0$ umgrenzt und in der Figur ein kleiner Kreis. Die nächste Schattenstufe ist zwischen den

Isophoten $H = 0$ und $H = 0{,}1$ enthalten, die nächste zwischen 0,1 und 0,2 u. s. w. Die letzte Stufe zwischen 0,9 und 1 ist weifs gelassen. Die Helligkeit $H = 1$ hat nur ein einziger Punkt, der durch einen kleinen Ring bezeichnet ist. Er entspricht dem Falle, dafs die Fläche nach Nordwest gekehrt ist und die Böschung von 45° hat. In denjenigen Teilen der Figur, wo gröfsere Flächen in gleichem Ton erscheinen, sind noch Zwischenisophoten von 2 zu 2 Hunderteln eingeschaltet, also z. B. zwischen den Isophoten 0,6 und 0,7 noch diejenigen, wo $H = 0{,}62$ 0,64 0,66 0,68 ist. Zwischen 0,4 und 0,5 ist nur die Mittelisophote 0,45 eingesetzt. Aufserdem ist die Linie für $H = 0{,}707$ ausgezogen, welche die Helligkeit der Horizontalebene angiebt und bei der geometrischen Konstruktion des Kurvensystems eine wichtige Rolle spielt.

Die Figur giebt die Schattentiefe für alle Böschungen abwärts bis 5°; der Radius des Begrenzungskreises ist gleich dem Isohypsenabstand bei diesem letzteren Böschungswinkel. Will man bis zu geringeren Böschungen gehen, so wird die Figur viel umfangreicher. Punktiert sind auch die Kreise angegeben, die den Böschungen von 10° und 20° entsprechen. — Wie schon gesagt, setzt die Figur eine Schichthöhe von 4^{mm} voraus; das würde beim Mafsstabe von 1 : 2 500 der Höhe von 10^{m} entsprechen. Bei dieser Äquidistanz und dem Mafsstabe von 1 : 25 000, wie sie bei den Mefstischblättern der preufsischen Landesaufnahme zu Grunde gelegt werden, würde die Schichthöhe nur $0{,}4^{mm}$ betragen, demgemäfs die ganze Figur auf ein Zehntel des Durchmessers zusammenschrumpfen und im Innern nicht mehr hinlänglich deutlich sein. Man hilft sich deshalb zweckmäfsiger dadurch, dafs man den auf der 25 000teiligen Karte gemessenen Isohypsenabstand verzehnfacht in den Zirkel nimmt und in der hier beigegebenen gröfseren Figur die Schattentiefe aufsucht. Es ist leicht einzusehen, dafs auf ähnliche Weise eine einmal entworfene Schattierungsskala für mehrere Mafsstäbe und Schichthöhen Verwendung finden kann.

Die Schattierung selbst kann natürlich ebensowohl durch Schraffen wie durch Tuschabtönung erzielt werden. Die in letzterer Art ausgeführten Terrainbilder, welche Wiechel seiner Abhandlung beigegeben hat, wirken aufserordentlich plastisch.

Drittes Kapitel.

Signaturen.

I. Allgemeines. Terrainsignaturen.

Als Signatur ist alles zu bezeichnen, was aufser einem geometrisch ähnlichen Grundrifs des auf der Erdoberfläche vorhandenen Linien- und Punktnetzes noch in die Karte eingetragen wird, sodafs streng genommen auch die Terraindarstellung und die Schrift dazugerechnet werden müssen. In jeder Karte sind einzelne Objekte kenntlich zu machen nötig, die nicht in geometrischem Grundrifs darstellbar sind, ohne der Wahrnehmung zu entschlüpfen, und je kleiner der Mafsstab, umsomehr häuft sich die Anzahl der nicht mehr darstellbaren Gegenstände. Eine Sandgrube von 10^m Durchmesser kann im Mafsstabe von 1 : 10 000 noch in geometrisch ähnlichem Grundrifs dargestellt werden und erhält im Bilde 1^{mm} Durchmesser, im Mafsstabe von 1 : 100 000 schwindet sie auf einen Punkt zusammen und mufs durch ein besonderes konventionelles Zeichen als Sandgrube kenntlich gemacht werden. In dem letztgenannten Mafsstab können Städte und Dörfer noch ihrem wesentlichen Grundrifs nach dargestellt werden, im Mafsstabe von 1 : 2 Millionen dagegen schwinden sie auf einen kleinen Fleck zusammen und müssen durch Signaturen unterschieden werden. Die Zahl sowie die Art und Gröfse der Signaturen wechseln daher je nach Mafsstab und Zweck der Karte.

Nimmt man auch die geometrisch strenge Terraindarstellung von den Signaturen im gewöhnlichen Sinne aus, so mufs man doch jedenfalls die generalisierende Gebirgszeichnung auf Karten kleineren Mafsstabs und auf Wandkarten dazurechnen. Diese Klasse der Signaturen ist aber noch am wenigsten in konventionelle Formen gebracht und läfst dem Zeichner noch viel Raum zur Entfaltung seiner Fertigkeit und seines Geschmacks und vor allem zum Beweise seines Verständnisses der geographischen Hauptzüge des Gebietes. Verlangt wird vor allem, dafs Tiefland, Hügelland, Mittel- und Hochgebirge deutlich unterscheidbar sind, dafs die Lage und Richtung der Hauptgebirgsketten klar hervortreten, dafs bei ausführlicheren Karten auch die wichtigsten Seitenäste des Gebirgs, die Längen- und Hauptquerthäler sicht-

bar, sowie Plateauränder kenntlich gemacht sind. Je gröfser der Mafsstab um so näher kann sich die Gebirgssignatur an das geometrisch strenge Terrainbild anlehnen, je kleiner der Mafsstab, um so selbständiger mufs sie sich gestalten. Eine gute Landkarte mufs der bildliche Ausdruck der im Geiste des Kartographen vollständig verarbeiteten Spezialkenntnisse von dem betreffenden Gebiete nach seinen physikalischen und kulturlichen Beziehungen sein. Muster solcher Bilder liefert vor allem in grofser Zahl der Stielersche Handatlas, an welche sich anzulehnen dem Lernenden nur empfohlen werden kann, zumal Einzelvorschriften für ihre Herstellung nicht gegeben werden können*).

In den kleinsten Mafsstäben kann eine Bergkette durch eine starke Linie dargestellt werden, wie in den Seidlitzschen Lehrbüchern; einen sehr empfehlenswerten Schritt weiter thut die Methode von Kirchhoff-Lehmann in den Erläuterungen zu dem von Debes herausgegebenen Zeichenatlas. Hiernach wird jedes Gebirg durch 2 aus Kreissegmenten zusammengesetzte Linien (Wolkenlinien) begrenzt, wobei der steilere Gebirgsabfall durch Verstärkung der ihn darstellenden Linie kenntlich gemacht werden kann. — Es reihen sich daran die Darstellungsweisen in Tuschmanier oder Schraffen (Raupenform) die entweder den Gedanken senkrechter oder schiefer Beleuchtung eines schematischen Gebirgskörpers — meist in der Grundform eines liegenden dreiseitigen Prismas — zum Ausdruck bringen.

Von besonderer, häufig nicht beachteter Wichtigkeit bei solchen Zeichnungen ist, vor Beginn derselben die Grenzen für die mit der Signatur zu bedeckenden Gebiete zu markieren, damit nicht die Gebirgshänge sich über Ebenen hin ausdehnen, vereinzelte Kuppen in Massengebirge sich umwandeln und ähnliches. Das Streben nach Grundrifsähnlichkeit sollte so zäh wie möglich festgehalten und bei abnehmenden Mafsstäben nur zögernd und Schritt um Schritt preisgegeben werden.

Für kartographische Darstellungen, die auf weiten Abstand betrachtet werden und wirken sollen, ist zu bemerken, dafs auf grofsen weifsen Flächen selbst sehr schwache Farbentöne sich deutlich abheben und dafs deshalb mittels Schattierung durch alle Stufen bis ins Schwarz bedeutender plastischer Eindruck erzielt werden kann, zumal wenn der Grundgedanke schiefer Beleuchtung festgehalten wird.

*) Vgl. die beherzigenswerten Äufserungen eines der am Stielerschen Atlas mitarbeitenden Meister, K. Vogel, in „Aus allen Weltteilen“ 1881. S. 142; 161.

II. Flächen-, Linien- und Ortssignaturen.

Die Signaturen im engeren Sinne des Worts kann man unterscheiden in Flächen-, Linien- und Ortssignaturen. Sämtliche werden entweder mit Zuhilfenahme von Farben oder nur in Schwarz ausgeführt. *a*) Die Flächensignaturen werden durch Anwendung eines Flächenkolorits sehr vereinfacht; auf schwarzen Karten müssen sie sehr zart ausgeführt werden um nicht zu stark zu decken. Hierher gehört zunächst die Bezeichnung der Wasserflächen im Gegensatze zu den Landflächen, ferner die verschiedenen Arten der Bodenbeschaffenheit und Kulturart, als Felsboden, Eisbedeckung, Ackerboden, Wald, Heide, Weide, Weinberge, Gärten, Moore, Sümpfe. *b*) Zu den Liniensignaturen gehören zunächst die für die verschiedenen Grenzen: politische, Verwaltungs-, Gemeinde- und Eigentumsgrenzen aller Art, deren Bezeichnung je nach ihrer Wichtigkeit abgestuft wird. Sie werden meist in Schwarz gehalten. Dann aber gehören hierher die Bezeichnungen für die verschiedenen Verkehrswege: Eisenbahnen, Kanäle, Landstrafsen, Feldwege, Fufspfade u. s. w.; ferner Gräben, Brücken und sonstige Wasserbauten. Diese Klasse von Signaturen läfst sich nicht scharf trennen von *c*) den Ortssignaturen, zu denen vor allem diejenigen der menschlichen Wohnplätze, Städte, Dörfer, Weiler, Höfe und Häuser zählen, ferner aber die Zeichen für Signale, Monumente, Betriebsstätten bestimmter Industrien und Gewerbe (wie Mühlen, Kalköfen u. s. w.), Fundstätten von wichtigen Mineralien, namentlich Kohlen und Metallen u. ähnl.

Viele der Signaturen für die unter *a*), *b*), *c*) genannten Objekte werden in nahezu identischer Form sehr allgemein angewandt, andere dagegen in abweichender Form und Anwendungsart. Es ist deshalb nicht zweckmäfsig hier ein Verzeichnis derselben aufzustellen. Bei allen gröfseren Kartenwerken findet man, bisweilen auf einem besonderen Blatte desselben, Verzeichnisse der gebrauchten Signaturen unter dem Namen Zeichenschlüssel oder Zeichenerklärung. Kleinere Einzelkarten müssen am Rande die Erklärung der wichtigsten Zeichen geben, die sich bei kleinen Mafsstäben meist auf die verschiedenen Klassen der Wohnplätze, der Verkehrswege und der Grenzen beschränken. Es ist ratsam, sich an gute Muster dieser Art streng zu halten. Viele Generalstäbe, wie z. B. der preufsische haben besondere Musterblätter für die topographischen Zeichnungen veröffentlicht. Die preufsischen Signaturen finden sich auf einem Blatt bequem vereinigt von Liebenow, Signaturen zum Planzeichnen (Berlin bei Schropp).

Beim Gebrauch der Signaturen ist eine wohlüberlegte Beschränkung zu beobachten, damit das Kartenbild nicht überladen werde.

III. Kartenschrift.

Zu den Signaturen im weiteren Sinne gehört auch die Kartenschrift, deren Aufgabe es ist die Benennung aller wissenswerten topographischen Objekte zu geben. Nach der Wichtigkeit dieser letzteren richtet sich Form und Gröfse der Schrift, die jedoch zum Kartenmafsstab und den übrigen Signaturen in einem passenden Verhältnisse stehn mufs. Die gröfste Gattung der stehenden römischen Kapitalschrift oder auch Steinschrift wird in der Regel zum Titel verwandt. Dann kommen die Namen der Länder, Provinzen und anderen Verwaltungsbezirke, der Meere, Flüsse und übrigen natürlichen Objekte, und endlich die der Städte in einer ihrer relativen Bedeutung angepafsten absteigenden Schriftgröfse. Für die kleinsten topographischen Objekte wird die sogenannte topographische Kursivschrift benutzt, deren Anwendung auch auf Manuskriptkarten wegen gröfserer Deutlichkeit und Gedrängtheit der gewöhnlichen lateinischen Schreibschrift entschieden vorzuziehen ist. Für gröfsere Objekte ist die Rundschrift sehr empfehlenswert, wobei aber alle ungewöhnlichen Buchstabenformen möglichst zu vermeiden sind. Auch Schriftmuster finden sich in der Regel auf den Musterblättern und Zeichenerklärungen der Generalstäbe. — Ein Gesichtspunkt in der Wahl der Schrift ist noch hervorzuheben, das ist die Rücksicht auf die Beschaffenheit des Grundes, worauf die Schrift steht. Je weifser, d. h. je weniger mit Terrain- und anderen Signaturen der Untergrund bedeckt ist, um so dünner, schlanker kann die Schrift sein, ohne unleserlich zu werden oder ihren Eindruck zu verfehlen; während dicke Schrift auf solchem Untergrund schwer lastet und das Kartenbild entstellt. Ein Vergleich z. B. der Darstellung der Silvretta-Gletschergruppe in Bl. 15 der topographischen Karte der Schweiz mit derjenigen auf dem Blatt „Illursprung“ Zone 18, Kol. 2 der österreichischen Spezialkarte lehrt dies auf den ersten Blick. Auf dunklem, stark schraffiertem Grunde sind dagegen starke, einfach gestaltete Schriftzeichen am Platz. So ist die Wahl der Steinschrift für die Bezeichnung der Alpweiden in der österreichischen Karte ein glücklicher Griff, während einzelne ungewohnte Namen in Rundschrift dem rasch darüber hinfliegenden Blick nicht sofort lesbar sind. (Man sehe z. B. im nordwestlichen Teile des Blatts „Illursprung“ die Benennung Valzerfenzer Grat u. a.)

Die Stellung der Schrift wird im allgemeinen dem oberen und unteren Kartenrand oder den Parallelkreisen parallel genommen. Der Name eines bestimmten Ortes oder anderen Objektes von unbedeutender Flächenausdehnung soll in der Regel dicht oberhalb des Ortszeichens stehn; bei gedrängter Raumerfüllung ist es auch gestattet

ihn daneben, niemals aber ihn darunter zu setzen. Im Notfall weicht man lieber von der Stellung parallel dem Kartenrande ab. Diese Abweichung wird zur Regel bei der Benennung von Flüssen, Bergketten und anderen lang und schmal hingedehnten Objekten. Hier folgt die Schrift in gemäfsigter Krümmung dem allgemeinen Verlaufe des Objektes, doch soll eine solche Bezeichnung nie länger gedehnt werden, als dafs der Zwischenraum zwischen zwei Buchstaben gleich der doppelten Buchstabenhöhe ist; lieber wird der Name wiederholt eingeschrieben.

Auch bezüglich der Schrift ist vor Überladung zu warnen; die Schrift beeinträchtigt immer die plastische Wirkung des Kartenbildes, darf dasselbe aber keinenfalls undeutlich machen.

Zur Kartenschrift gehören auch die einzusetzenden Höhenzahlen. Diese werden in der Regel alle in derselben Zifferngröfse und Stellung, d. h. entweder steif oder liegend geschrieben. Treten Tiefenangaben von Gewässern hinzu, so unterscheidet man Höhen und Tiefen zweckmäfsig durch stehende und liegende Zahlen.

Da die Höhenzahlen in gewissem Sinne auch Terrainsignaturen sein sollen, welche Eigenschaft namentlich bei Karten ohne Isohypsen in den Vordergrund tritt, so mufs noch ein Wort bezüglich deren Auswahl hinzugefügt werden. Sind wenig Höhlenzahlen in dem Gebiete bekannt, so wird man in der Regel alle aufnehmen; sind aber sehr viele bekannt, so hat man die charakteristischen auszuwählen. Solche sind nicht nur Gipfel- und Pafshöhen, sondern auch die Koten, welche Höhe und Neigung ebener Flächen sicher zu beurteilen gestatten; z. B. bei einer vom Gebirg zu einem Strom sich hinziehenden Ebene einige Punkte am Gebirgsfufs und einige längs dem Strome; in Gebirgsthälern die Höhen der bemerkenswertesten Thalweitungen und Stufenränder; bei Plateaux mit eingerissenen Flufsläufen benachbarte Randhöhen und Flufsspiegelhöhen; bei Terrassen die Koten korrespondierender Punkte der oberen und unteren Stufe u. s. w. Planlos eingeschriebene Höhenzahlen verwirren den Leser der Karte oft mehr als sie ihm nützen.

Anhang.

Einige Grundregeln für das Zeichnen mit Zirkel und Lineal.

Beim geometrischen Zeichnen bediene man sich eines harten **Bleistifts** zum Linienziehen und eines mittleren (Faber *HB*) zum Bezeichnen von Punkten mit Buchstaben oder anderen Merkzeichen. Wird ersterer Stift in eine parallel dem Lineal zu führende Schneide geschärft, so wird er minder rasch abgenutzt. Der Schreibstift ist kegelförmig zu spitzen.

Das **Lineal** wird zum Linienziehen fest auf das Papier gedrückt und die Spitze des Stiftes bei geneigter Haltung desselben dicht an der auf dem Papier liegenden Kante hingeführt (Fig. 104). Bauchig

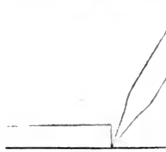


Fig. 104.

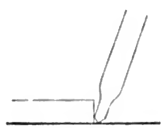


Fig. 105.

gespitzte oder geschärfte Stifte sind ungeeignet zum Linienziehen, weil die Linie in einige Entfernung vom Lineal fällt (s. Fig. 105). Um die Linie auf alle Fälle wenigstens dem Linealrand parallel zu machen, gewöhne man sich, während des Ziehens den Stift in unveränderter Neigung gegen das Papier zu halten.

Zum Ziehen gerader Linien dient die **Reifsschiene** (das Anschlagelineal) und das rechtwinklige Dreieck, oft kurzweg **Winkel** genannt. Die Reifsschiene wird vorzugsweise in Verbindung mit dem genau rechtwinkligen **Reifsbrett** gebraucht. Wenn der Backen *AB*, auf welchem die eigentliche Schiene *CD* senkrecht befestigt ist, an der Reifsbrettkante anliegt, so werden alle längs der Schienenkante gezogenen Linien senkrecht zu jener Reifsbrettkante, also untereinander

parallel. Man gewöhne sich daran die Reifsschiene immer nur von einer (der linken) Seite her anzulegen.

Reifsschiene und Winkel sollen von bester Beschaffenheit sein. Um sich zu überzeugen, ob eine Kante gerade ist, ziehe man längs derselben eine Linie durch 2 beliebig, aber etwas entfernt von einander angenommene Punkte. Darauf drehe man das Lineal in seiner eigenen Ebene um 180°, sodafs es auf die andere Seite der gezogenen Linie zu liegen kommt und zieht eine zweite Linie durch dieselben Punkte. Fallen beide Linien nicht zusammen, so ist die Linienkante zu genauer Arbeit untauglich.

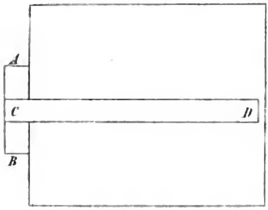


Fig. 106.

Schiebt man den Winkel mit seiner einen Kante längs der festgehaltenen Kante eines anderen Lineals hin, so sind die in den verschiedenen Lagen längs derselben Winkelkante gezogenen Linien parallel. In Fig. 107 sind die längs AC und die längs BC gezogenen Parallelen mit unterbrochenen Linien gezeichnet. Demnach kann man mit Reifsschiene und Winkel zu jeder gegebenen Linie Parallelen ziehen, indem man den Winkel mit irgend einer Kante an die gegebene Gerade anlegt, die Reifsschiene (oder einen zweiten Winkel) an eine der beiden anderen Kanten fest anlegt und dann den ersten Winkel längs der festgehaltenen Schiene verschiebt.

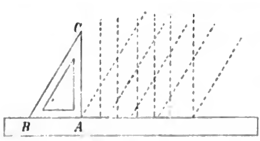


Fig. 107.

Ist das Dreieck rechtwinklig und wird eine Kathete an die Reifsschiene angelegt, so ist jede längs der anderen Kathete gezogene Linie senkrecht zu der längs der Reifsschienenkante gezogenen. Verschiebt man die Hypotenuse längs einer festgehaltenen Linealkante, so stehen alle längs der einen Kathete gezogenen Geraden senkrecht auf den längs der anderen Kathete gezogenen. Darin hat man zwei einfache Mittel um durch irgend einen Punkt eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade zu ziehen.

Um sich zu überzeugen, dafs das Winkeldreieck auch wirklich rechtwinklig sei, ziehe man durch einen von der Reifsschienenkante ziemlich entfernt angenommenen Punkt eine Senkrechte auf diese, dann drehe man das Dreieck in seiner Ebene um den Fufspunkt jener Senkrechten und ziehe dann durch denselben Punkt abermals eine

Senkrechte. Fallen beide nicht zusammen, so ist der Winkel kein rechter, also das Dreieck unbrauchbar.

Der Zirkel, dessen Spitzen immer scharf sein müssen, soll sich beim Abgreifen von Längen und Abstechen von Punkten stets in einer zum Papier nahezu senkrechten Ebene befinden. Auch soll der Zirkel nicht mehr als etwa zu einem rechten Winkel geöffnet werden. Gröfsere Längen überträgt man besser in mehreren Abteilungen. Die Zirkelstiche sollen fein sein. Zu ihrer Markierung umgiebt man sie mit einem kleinen Kreise oder setzt man einen kurzen auf sie hinweisenden Strich dazu. Durch Kreuzestriche zu bezeichnen ist nicht empfehlenswert, weil dadurch das Loch leicht zugedrückt und schwer erkennbar wird. Hat man von demselben Mittelpunkte aus viele Kreise zu beschreiben, so setzt man zur Schonung des Papiers ein Zentrumscheibchen in den Mittelpunkt. Dasselbe hat die Form eines gewöhnlichen Heftstiftes (Zwecke) mit feiner Spitze und Vertiefung in deren Verlängerung auf der Knopfmitte, worin der Zirkelfufs einzusetzen ist. Für Kreise mit grofsem Radius dient der Stangenzirkel, aus einer prismatischen Stange bestehend, welche 2 Hülsen, eine am Ende fest, die andere verschiebbar, mit senkrecht zur Stange stehenden Stahlspitzen, geschoben sind. Statt des Stangenzirkels kann auch eine Latte oder ein Streifen starker Pappe dienen, die mit einem Ende mittels einer Nadel im Kreiszentrum befestigt wird, während in der richtigen Entfernung von da eine zweite Nadel oder der Zeichenstift angebracht wird.

Wenn man, wie dies beim Netzentwurfe regelmäfsig vorkommt, mittels des Zirkels die wiederholte Auftragung einer und derselben Strecke (oder auch verschiedener Strecken) auf derselben Geraden auszuführen hat, so summieren sich, falls man die einzelnen Strecken hintereinander absticht, die Fehler der ersten Abmessung. Selbst bei gröfster Sorgfalt ist beim Abgreifen einer Strecke auf einem Mafsstab oder vom Papier ein Fehler von bis $0{,}1^{mm}$ nicht zu vermeiden, so dafs man zwischen den Zirkelspitzen leicht $0{,}1^{mm}$ zu viel oder zu wenig hat; trägt man die Länge nur 10mal hintereinander auf, so beträgt der Fehler schon 1^{mm}, bei 20maliger Auftragung 2^{mm}, um welche der letzte Punkt vom Anfangspunkt zu weit oder zu nahe liegt. Diesen Fehler vermeidet man, wenn man die ganzen Entfernungen vom Anfangspunkt aufträgt, also statt der Längen:

$$AB, BC, CD, \ldots MN$$

die Längen:

$$AN, AM, \ldots AD, AC, AB.$$

Sind die Abschnitte zu lang, um mehrere zugleich in den Zirkel zu nehmen, so benutzt man am besten einen in Millimeter geteilten

Anlegemafsstab, wie sie in Buchsbaumholz mit genauer Teilung bis zu 0,5^{m} Länge billig käuflich sind. Sind die (gleichen oder ungleichen) Teile AB, BC ... in Millimetern gegeben, so berechnet man sich daraus durch Addition die Abschnitte AC, AD, ... AN. Die Beachtung dieser Regel ist von gröfster Wichtigkeit, wenn gute Resultate erhalten werden sollen. — Bei der Auftragung einer Reihe von verschieden langen Strecken arbeitet man am raschesten, wenn man mit der längsten beginnt und mit der kürzesten aufhört.

Um eine Strecke zu halbieren beschreibt man mit einer Zirkelöffnung, die ungefähr $^3/_4$ der Strecke beträgt, von jedem Endpunkt A, E aus 2 Kreisbogen beiderseits der Geraden und verbindet die Schnittpunkte S und T. Die Gerade ST halbiert AE und steht überdies senkrecht auf AE, sodafs man hierin noch ein Mittel hat, eine Senkrechte zu fällen. Soll diese durch einen bestimmten (der Linie selbst angehörigen oder äufseren) Punkt gehen, so setzt man in diesen zuerst die Zirkelspitze ein und schneidet durch Kreisbogen beiderseits gleich weit entfernte Punkte auf der gegebenen Geraden ab, von denen aus dann dieselbe Konstruktion, wie vorher von A und E aus, gemacht wird.

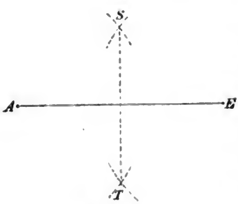


Fig. 108.

Das Teilen einer Strecke in eine geforderte Anzahl gleicher Teile ist, wenn die Zahl gröfser als 3 ist, durch Probieren nur mühsam zu erreichen; sehr leicht aber, wenn man den Ähnlichkeitssatz benutzt, wonach ein System von Parallellinien jede schneidende Gerade in denselben Verhältnissen teilt. Trägt man also eine Gröfse, die man ungefähr für den geforderten aliquoten (n^{ten}) Teil der gegebenen Strecke AB hält, auf einer um etwa 30° gegen AB geneigten Geraden AC $n$mal auf, in Fig. 109 10mal, verbindet den letzten Punkt L mit B und zieht dann durch sämtliche Teilpunkte Parellelen zu LB, so erhält man durch sie die Strecke AB in die geforderte Anzahl, hier 10, gleicher Teile geteilt.

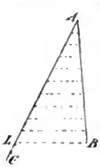


Fig. 109.

Derselbe geometrische Satz wird auch zur Konstruktion der sogenannten Transversalmafsstäbe benutzt. Zu jeder Karte zeichnet man sich den Mafsstab auf, indem man die gewählte Mafseinheit (Meile, Kilometer) im verjüngten Mafse 10, 20, 30 ... oder noch mehrmal auf einer Geraden aufträgt.

Um von der gewählten Einheit auch noch Bruchteile, Zehntel,

mit Sicherheit abgreifen zu können, dient der Transversalmaßstab. Fig. 110 stellt einen solchen für Kilometer im Verjüngungsverhältnis von 1 : 500 000 dar. Parallel zu dem einfachen Kilometermaßstab, den die unterste Linie darstellt, zieht man 10 Geraden von je gleichem, aber beliebig großem Abstand und schneidet sie durch Senkrechten, die in den Punkten *10 0 10 20 30* . . . u. s. w. errichtet werden. Von der obersten Linie wird die erste Abteilung in dieselben 10 Teile eingeteilt wie die unterste und nun wird der Punkt *0* der unteren Teilung mit dem Punkte *1'* der oberen, der Punkt *1* der unteren mit dem Punkte *2'* der oberen u. s. w. durch Transversalen verbunden.

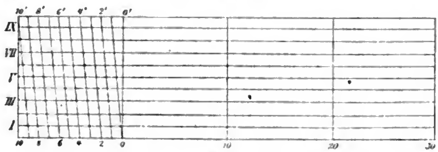


Fig. 110.

Die Abschnitte dieser Transversalen auf den Parallelen sind je gleich der Teilungseinheit, stellen also hier je 1^{km} dar. Betrachtet man aber das Dreieck *0 0' 1'*, so bilden in ihm die Parallelen lauter ähnliche Dreiecke, deren Grundlinien sich wegen der Gleichabständigkeit der Parallelen verhalten wie:

$$1 : 0{,}9 : 0{,}8 : 0{,}7 \; . \; . \; . \; 0{,}2 : 0{,}1.$$

Das zwischen den Linien *0 0'* und *0 1'* enthaltene Stückchen der VII^ten^ Parallelen entspricht also $0{,}7^{km}$ u. s. w.

Will man nun z. B. $26{,}3^{km}$ abgreifen, so mißt man auf der III^ten^ Parallelen ab, indem man den rechten Zirkelfuß in deren Schnittpunkt mit der in *20* errichteten Senkrechten einsetzt und links bis zur 6^ten^ Transversalen öffnet. Man hat dann zwischen den Zirkelspitzen:

$$6 + 0{,}3 + 20 = 26{,}3.$$

Um Winkel zu teilen, teilt man die zugehörigen Bogen. Das Halbieren geschieht wie bei der geraden Strecke, doch ist das Bogenschlagen nur auf einer Seite des zu halbierenden Bogens nötig, weil ein Punkt der Halbierungslinie bereits durch den Scheitel des Winkels gegeben ist.

Hat man, wie dies bei vielen Projektionen nötig ist, eine Kreisperipherie mit der Gradeinteilung (wenigstens von 10 zu 10^0) zu versehen, so vierteilt man zunächst durch 2 aufeinander senkrechte Durchmesser und schneidet dann mit dem in den Zirkel genommenen Kreisradius von den 4 Endpunkten dieser Durchmesser aus beiderseits in die Peripherie ein, so erhält man die Teilung in 30^0-Bogen.

Die weitere Unterabteilung zunächst in je 3 gleiche Teile macht man durch Probieren. Hat man an einem 30°-Bogen den dritten Teil möglichst genau gefunden, so trage man denselben von jedem der 12 vorhandenen, 30°-abständigen Teilpunkte rechts und links auf. Eine Zirkelstellung zu suchen, wobei die Strecke 36mal hintereinander aufgetragen in der Peripherie gerade aufgeht, ist aussichtslose Arbeit.

Die ganze Kreiseinteilung macht man am schnellsten mit dem Transporteur (von Metall, Horn oder Papier), der hauptsächlich zum Auftragen von Winkeln dient. Auf genaue Anlegung des Nullradius an die Gerade, welche den einen Schenkel des anzutragenden Winkels bilden soll und scharfe Zentrierung im Scheitel desselben ist besonders zu achten.

Auch beim Aneinanderlegen vieler Winkel aneinander befolge man dieselbe Vorsicht wie beim Streckenauftragen und bilde die Summe der Winkel bis zum letzten, vorletzten, vorvorletzten u. s. w., die dann alle von demselben Anfangspunkte aus bei festbleibender Lage des Transporteurs abgestochen werden, wozu am besten eine feine Nadel oder ein Zirkelfufs dient.

Am genausten kann man Winkel mittels ihrer Sehnen auftragen. Zu diesem Zwecke braucht man, falls die Winkel im Gradmafse gegeben sind, eine Sehnentafel, welche für einen bestimmten Radius, der meist = 100 angenommen ist, die Länge der Sehne für alle von Grad zu Grad, oder von Zehntelgrad zu Zehntelgrad fortschreitenden Winkel zwischen 0° und 180° angiebt. Die Benutzung der Sehnen ist namentlich förderlich, wenn es sich darum handelt ein System von Richtungen um einen bestimmten Winkel zu drehen, wie dies bei der oben S. 128 behandelten Aufgabe vorkommt.

Zieht man durch alle Punkte B, C, E, die um den Drehpunkt A geschwenkt werden sollen, Strahlen nach A und schneidet diese durch einen um A als Zentrum geschlagenen Kreisbogen KK' von nicht zu kleinem Radius, so hat man nur von dem Schnittpunkte jedes Strahls aus die Sehne des Drehungswinkels abzustechen um die neue Richtung für den Strahl bestimmt zu erhalten. Soll z. B. der Endpunkt E nach E' gedreht werden, so ist ee' die Sehne des Drehungswinkels und es ist diese Länge also von b und c aus abzustechen, sodafs $bb' = cc' = ee'$. Durch die Punkte b' und c' sind die neuen Richtungslinien zu ziehen, auf welche dann B und C

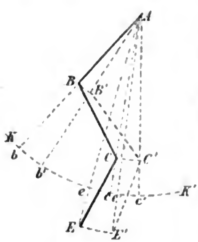


Fig. 111.

mittels der Radien $AB = AB'$ und $AC = AC'$ herübergeschwenkt werden.

Nach dem Kreise ist die **Ellipse** die am häufigsten zu zeichnende Kurve. Es giebt zwar Ellipsenzirkel, doch dürften solche nicht Vielen zur Hand sein. Mit dem Bleistift lassen sich Ellipsen ohne viele Umstände nach dem Satze konstruieren, dafs die Summe der beiden Fahrstrahlen nach einem Ellipsenpunkt immer gleich der grofsen Achse ist. Man sticht zwei feine Nadeln in die beiden Brennpunkte ein und knüpft einen Faden von der Länge der grofsen Achse mit beiden Enden um die Nadeln. Spannt man dann den Faden mittels der Bleistiftspitze an und führt diese bei andauernder Spannung herum, so beschreibt sie die Ellipse. Mit der Reifsfeder ist das Verfahren minder günstig, auch ist es zu umständlich, wenn man auf kleiner Fläche viel Ellipsen zu ziehen hat. — Ellipsen von kleiner Exzentrizität, die also wenig von der Kreisform abweichen, kann man mit dem gewöhnlichen Zirkel aus 4 Kreisbogen mit hinlänglicher Genauigkeit zusammensetzen. Zu diesem Zwecke zeichne man das Achsenkreuz auf und trage die Differenz $(a - b)$ der Halbachsen vom Mittelpunkte C aus beiderseits zweimal auf der kleinen Achse und $1\frac{1}{2}$mal auf der grofsen auf, sodafs also:

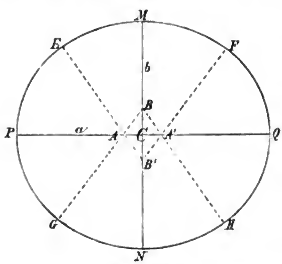


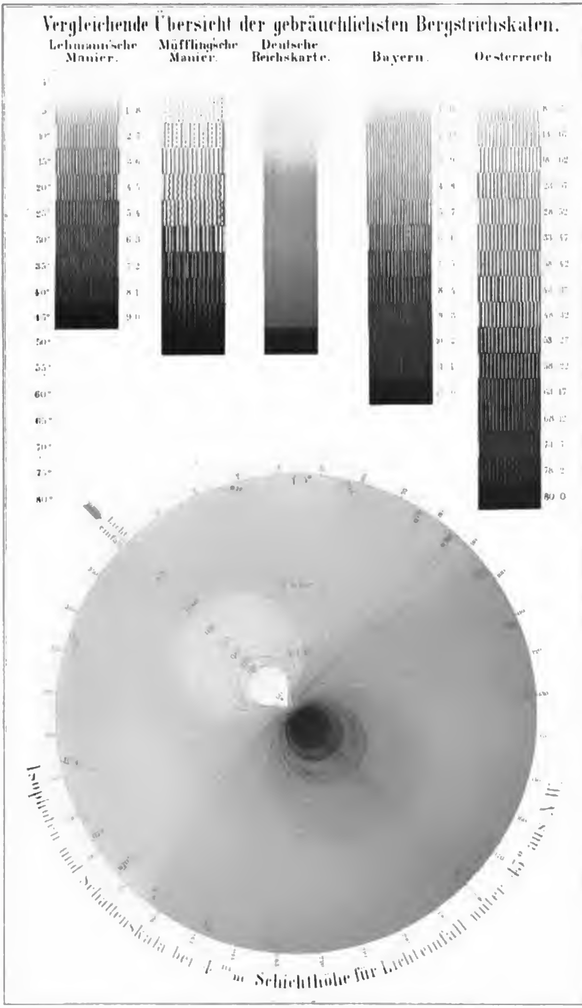
Fig. 112.

$$CB = CB' = 2(a - b),$$
$$CA = CA' = \tfrac{3}{2}(a - b)$$

ist. Setzt man dann den Zirkel in B' ein und öffnet bis M, so erhält man einen Bogen EMF, ebenso von B aus GNH. Der Bogen EPG wird von A aus und FQH von A' aus beschrieben. Bei genauer Ausführung treffen die Bögen in E, F, G, H scharf aufeinander. Stärker exzentrische Ellipsen mufs man durch die konstruierten Punkte aus freier Hand oder mit einem **Kurvenlineal** ziehen.

Jede Kurve kann aus Kreisbogenstückchen zusammengesetzt gedacht werden, wovon jedes folgende einen etwas anderen Radius hat als das vorhergehende. Der verschiedene Kurvencharakter entsteht durch die verschieden rasche Zu- oder Abnahme des Radius beim Fortschritt um eine bestimmte Länge (z. B. 1^{cm}) auf der Kurve. Wenn man eine Auswahl von Kurvenlinealen besitzt, die nach verschiedenen Gesetzen gekrümmt sind, so findet sich leicht an einem derselben eine Gegend des Randes, die an die konstruierten Punkte

angelegt eine stetige Kurve wenigstens durch einige derselben zu ziehen gestattet. Beim Gebrauch schiebe man das Lineal so, dafs der Rand durch möglichst viele Punkte hindurchgeht; ziehe dann aber die Linie nur bis zum vorletzten getroffenen Punkt, lege es dann von diesem beginnend an weitere Punkte an und ziehe dann die Linie in stetigem Anschlusse an das vorhergezogene Stück. Im ungünstigsten Falle wird man immer 3 Punkte A, B, C an die Kante bringen können, man ziehe dann nur AB aus und lege nun an BCD an, worauf BC gezogen wird u. s. w.; so vermeidet man am besten Unstetigkeiten, Knicke im Zug der Kurve.


Vergleichende Übersicht der gebräuchlichsten Bergstrichskalen.
Lehmann'sche Manier.
Müffling'sche Manier.
Deutsche Reichskarte.
Bayern.
Oesterreich
Isophoten und Schattenskala bei 4 mm Schichthöhe für Lichteinfall unter 45° aus N.W.